MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

14. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

14. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Bauer, M., Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper 244
Bochner, S., Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen 180
Chwistek, L., Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik 236
Cohn, A., Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise 110
Hilb, E., Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen 211
Hoheisel, G., Lineare funktionale Differentialgleichungen. (I. Mitteilung) . . . 35
Jung, H. W. E., Über die Rückkehr-, Wende- und Flachkurve einer algebraischen Fläche 1
Kogbetliantz, E., Über die $(C\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $\frac{1}{2} < \delta < 1$ 99
König, D., Über konvexe Körper 208
Liebmann, H., Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze. (Orthogonalprojektionen von Haupttangentenkurven) 159
Lukács, F.†, Über die Laplacesche Reihe 250
Mittelsten-Scheid, Fr., Die Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen hyperkomplexer Größen in unzerlegbare Faktoren 263
Neder, L., Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen 149
Salkowski, E., Über den gemischten Flächeninhalt zweier ebenen Figuren . . 230
Sternberg, W., Über die lineare Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Variablen 169

Über die Rückkehr-, Wende- und Flachkurve einer algebraischen Fläche.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

Zu den Kurven einer algebraischen Fläche F, die für ihre Gestalt von Bedeutung sind, gehören auch die Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$, die Wendekurve $\mathfrak{R}'$, d. i. der Ort der parabolischen Punkte, und die Flachkurve $\mathfrak{W}$. Die letzte ist dadurch definiert, daß in jedem ihrer Punkte die Berührungsebene die Fläche F von höherer Ordnung berührt. Außer diesen Kurven betrachten wir noch eine, die ich die uneigentliche Inflexionskurve von F nenne und mit $\mathfrak{S}_1$ bezeichne. Sie ist der von den Differentialen unabhängige Faktor derjenigen quadratischen Differentialform, die, gleich Null gesetzt, die Inflexionskurven von F definiert. Die Kurven $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}_1$ sind im allgemeinen keine Primkurven. Ist $\mathfrak{P}$ eine Primkurve von F, so mögen die Zahlen ϱ, ϱ', φ, σ_1 angeben, wie oft $\mathfrak{P}$ in den Kurven $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}_1$ enthalten ist.

Im ersten Teil der Arbeit werden allgemeine Eigenschaften der in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}_1$ enthaltenen Primkurven und ihr Verhalten zu den Inflexionskurven von F hergeleitet. Im zweiten Teile werden Beziehungen zwischen den Zahlen ϱ, ϱ', φ, σ_1 abgeleitet. Als Anwendung wird zum Schluß eine Formel von Halphen bewiesen.

Das Wesentliche an der Arbeit sind nicht die Ergebnisse, sondern die Methode der Herleitung. Wegen der Ergebnisse, besonders des zweiten Teiles, sei vor allem auf die Arbeit von Halphen verwiesen: Sur les lignes singulières des surfaces algébriques[1]). Ich benutze im folgenden meine Arbeiten in dieser Zeitschrift **8** (1920), S. 182—221; **13** (1922), S. 189—201; **13** (1922), S. 202—216, die ich mit D, K und E zitiere.

[1]) Annali di Matematica, Serie 2, **9**, p. 68—105.

I. Die Inflexionstangentenkurven.

1. Die Kurve $\mathfrak{J}$.

Die Inflexionstangentenkurven $\mathfrak{J}$ oder, wie wir kurz sagen wollen, die $\mathfrak{J}$-Kurven sind in folgender Weise definiert (vgl. D V, 4, S. 193). Es sei g irgendeine Gerade und es seien (y), (z) zwei ihrer Punkte und (y'), (z') zwei ihrer Ebenen. Wir setzen

$$(1) \qquad p_{\alpha\beta} = y'_\alpha z'_\beta - y'_\beta z'_\alpha, \qquad p'_{\alpha\beta} = y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha,$$

so daß die $p_{\alpha\beta}$ und ebenso die $p'_{\alpha\beta}$ die Plückerschen Koordinaten von g sind, und zwar seien die $p_{\alpha\beta}$ die Koordinaten erster und die $p'_{\alpha\beta}$ die zweiter Art genannt. Wir können es immer so einrichten, daß

$$(2) \qquad p_{\alpha\beta} = p'_{\gamma\delta},$$

wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ eine grade Permutation von 1234 ist. Wir setzen

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum p_{kl}(\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k) = X du + Y dv, \\ \sum p'_{kl}(\mathfrak{A}'_k d\mathfrak{A}'_l - \mathfrak{A}'_l d\mathfrak{A}'_k) = X' du + Y' dv, \end{cases}$$

$$(4) \qquad XY' - X'Y = \mathfrak{J}.$$

Nach D V, 4, S. 193, 194 bestehen die Gleichungen

$$(5) \qquad LY^2 - 2MYX + NX^2 = -\mathfrak{R}\mathfrak{J},$$

$$(6) \qquad LY'^2 - 2MY'X' + NX'^2 = \mathfrak{R}'\mathfrak{J},$$

$$(7) \qquad \mathfrak{R}'(X du + Y dv)^2 - \mathfrak{R}(X' du + Y' dv)^2 = \mathfrak{J} Q_2(du, dv).$$

Verstehen wir unter $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse der Fläche F, so bestehen wegen

$$(8) \qquad \mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}\mathfrak{A}^{-3} \sim \mathfrak{R}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}^{-3} \sim \mathfrak{A}^{n-4}\mathfrak{D}^{-1}$$

nach D, S. 221 (III) und (III') die Äquivalenzen

$$(9) \qquad \mathfrak{J} \sim \mathfrak{K}\mathfrak{A}^2\mathfrak{A}'^2 \sim \mathfrak{R}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}'^3 \sim \mathfrak{R}'\mathfrak{A}^3\mathfrak{A}'^{-1}.$$

Die durch (4) definierte Kurve $\mathfrak{J}$ nennen wir eine *Inflexionstangentenkurve* oder kurz eine $\mathfrak{J}$-*Kurve*. Da sie von der Lage der Geraden g abhängt, gibt es unendlich viele $\mathfrak{J}$-Kurven, die alle zueinander äquivalent sind. Die Kurven sind zu sich selbst dual.

Die $\mathfrak{J}$-Kurven können einen von der Geraden g unabhängigen Faktor haben. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{W}$ und nennen $\mathfrak{W}$ die *Flachkurve von F*. Es sei

$$(10) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{W}\mathfrak{J}_0.$$

Die $\mathfrak{J}_0$-Kurven können gemeinsame von der Lage der Geraden g unab-

hängige Stellen haben. Diese nennen wir *isolierte Flachstellen von F*. (Vgl. E I, 5, S. 208.)

2. Eine Formel.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primkurve auf F und es sei $\overline{\mathfrak{P}}$ die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche. Wir wenden auf $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ die Bezeichnungen von K I an, müssen aber beachten, daß im allgemeinen $\overline{\mathfrak{P}}$ nicht die Tangentenfläche von $\mathfrak{P}$ ist. Wir unterscheiden daher durch Überstreichen die sich auf $\overline{\mathfrak{P}}$ beziehenden Größen von zu $\mathfrak{P}$ gehörenden.

Für $\mathfrak{P}=0$ werden die $\mathfrak{A}_\alpha$ proportional zu den Koordinaten ξ_α eines Punktes (ξ) von $\mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{A}'_\alpha$ zu den Koordinaten $\bar{\xi}'_\alpha$ einer Ebene $(\bar{\xi}')$ von $\overline{\mathfrak{P}}$. Setzen wir also

$$\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\mathfrak{P}=0}=\mathfrak{a}_\alpha, \qquad \{\mathfrak{A}'_\alpha\}_{\mathfrak{P}=0}=\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha, \tag{11}$$

so sind die $\mathfrak{a}_\alpha$ gleich den $\mathfrak{a}_\alpha$ in K I und die $\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha$ sind die dort mit $\mathfrak{a}'_\alpha$ bezeichneten Divisoren. Wir bezeichnen im übrigen den Divisor, der aus einer Kurve für $\mathfrak{P}=0$ hervorgeht, mit demselben, aber kleinen, Buchstaben.

Die Fundamentalgrößen L, M, N können einen gemeinsamen Faktor haben, den wir mit $\mathfrak{S}_1$ bezeichnen. Wir setzen

$$Q_2(\xi,\eta)=\mathfrak{S}_1 Q(\xi,\eta)=\mathfrak{S}_1(l\xi^2+2m\xi\eta+n\eta^2). \tag{12}$$

Wegen (10), (12) folgt aus (7)

$$\mathfrak{R}'(X\,du+Y\,dv)^2-\mathfrak{R}(X'\,du+Y'\,dv)^2=\mathfrak{S}_1\mathfrak{W}\mathfrak{J}_0 Q(du,dv). \tag{13}$$

Es muß daher $\mathfrak{S}_1\mathfrak{W}$ durch den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ teilbar sein. Wir setzen

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_0, \qquad \mathfrak{R}'=\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}'_0, \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{W}=\mathfrak{R}_1\mathfrak{W}_0 \tag{14}$$

und haben statt (13)

$$\mathfrak{R}'_0(X\,du+Y\,dv)^2-\mathfrak{R}_0(X'\,du+Y'\,dv)^2=\mathfrak{W}_0\mathfrak{J}_0 Q(du,dv). \tag{15}$$

Für $\mathfrak{P}=0$ folgt aus (3), (11) wegen K, S. 190 (2); S. 191 (5)

$$X\,du+Y\,dv=\sum p_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}_\alpha\,d\mathfrak{a}_\beta-\mathfrak{a}_\beta\,d\mathfrak{a}_\alpha)=\mathfrak{d}_1\sum p_{\alpha\beta}\mathfrak{a}_{\alpha\beta}, \tag{16}$$

$$X'\,du+Y'\,dv=\sum p'_{\alpha\beta}(\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha\,d\bar{\mathfrak{a}}'_\beta-\bar{\mathfrak{a}}'_\beta\,d\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha)=\bar{\mathfrak{d}}_3\sum p'_{\alpha\beta}\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha\beta}. \tag{17}$$

Wegen (2) und K, S. 191 (5) haben wir auch

$$X'\,du+Y'\,dv=\bar{\mathfrak{d}}_3\sum p_{\alpha\beta}\bar{\mathfrak{a}}_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Die $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ und die $\bar{\mathfrak{a}}_{\alpha\beta}$ sind die Plückerschen Koordinaten zweiter Art der Geraden von $\mathfrak{P}$ und der von $\overline{\mathfrak{P}}$. Es sind also die $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ dann und

nur dann proportional zu den $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$, wenn $\mathfrak{H}$ die Tangentenfläche von $\mathfrak{H}$ ist, wenn also die Schmiegungsebenen von $\mathfrak{H}$ Berührungsebenen von F sind.

Setzen wir

$$\{Q(du, dv)\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{q}, \tag{19}$$

so folgt wegen (16) und (18) aus (7) und (14)

$$\mathfrak{r}' \mathfrak{d}_1^2 \Big\{\sum p_{kl} \mathfrak{a}_{kl}\Big\}^2 - \mathfrak{r} \bar{\mathfrak{d}}_3^2 \Big\{\sum p_{kl} \bar{\mathfrak{a}}_{kl}\Big\}^2 = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{w} \mathfrak{i}_0 \mathfrak{q}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{r}_0' \mathfrak{d}_1^2 \Big\{\sum p_{kl} \mathfrak{a}_{kl}\Big\}^2 - \mathfrak{r}_0 \mathfrak{d}_3^2 \Big\{\sum p_{kl} \bar{\mathfrak{a}}_{kl}\Big\}^2 = \mathfrak{w}_0 \mathfrak{i}_0 \mathfrak{q}. \tag{21}$$

Von diesen Gleichungen kann die erste nur verwandt werden, wenn $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}_1$ enthalten ist.

Der Divisor $\mathfrak{i}_0$ in (20) und (21) hängt von den Parametern p_{kl} ab. Er kann einen Faktor haben, der von den p_{kl} unabhängig ist. Diesen bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}_1$ und setzen

$$\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2. \tag{22}$$

Solange die Lage der Geraden g keiner Beschränkung unterworfen ist, liefern zu $\mathfrak{i}_1$ nur diejenigen isolierten Flachstellen einen Beitrag, durch die $\mathfrak{P}$ geht. Es ist dann die Ordnung $[\mathfrak{i}_1]$ von $\mathfrak{i}_1$ gleich der Zahl der festen und die Ordnung $[\mathfrak{i}_2]$ von $\mathfrak{i}_2$ gleich der Zahl der beweglichen Schnittstellen von $\mathfrak{P}$ mit den $\mathfrak{J}_0$-Kurven. Wir setzen

$$[\mathfrak{i}_1] = [\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0], \qquad [\mathfrak{i}_2] = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0\}, \tag{23}$$

so daß

$$[\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0] + \{\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0\} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{F}) - (\mathfrak{P}, \mathfrak{W}). \tag{24}$$

3. Die Flachkurve $\mathfrak{W}$.

Es gilt nach E I, 5, S. 209 der Satz:

Ist die Primkurve $\mathfrak{P}$ in der Flachkurve $\mathfrak{W}$ in der φ-ten Potenz enthalten und keine Punktkurve, so hat ein durch eine reguläre Stelle von $\mathfrak{P}$ gehender ebener Schnitt ohne besondere Lage in S eine Wendetangente von der Wendeordnung φ. Ebenso gilt der hierzu duale Satz. Wir beweisen ferner:

Eine in $\mathfrak{W}$ enthaltene Primkurve, die nicht Punkt- oder Ebenenkurve ist, ist gleichzeitig in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ enthalten.

Es sei nämlich $\mathfrak{P}$ weder in $\mathfrak{R}$ noch in $\mathfrak{R}'$ enthalten und es sei eine reguläre Stelle von $\mathfrak{P}$. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß S die Ecke 1 des Koordinatentetraeders ist, so daß wir $\mathfrak{A}_1 = 1$ annehmen können. Es sei $y_2 = 0$ eine Ebene durch S ohne besondere Lage. Sie kommt dann in $\mathfrak{A}_2(u, v)$ ein lineares Glied vor. Denn wenn für jede durch eine reguläre Stelle S von $\mathfrak{P}$ gehenden ebenen Schnitt $\mathfrak{A}$ in der

zugeordneten Funktion $\mathfrak{A}(u, v)$ die linearen Glieder fehlen würden, so würden längs $\mathfrak{P}$ die Determinanten $\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k$ Null sein. Es wären also längs $\mathfrak{P}$ die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_k$ konstant und $\mathfrak{P}$ wäre eine Punktkurve. Das aber kann nicht sein, da $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Wir können also etwa annehmen, daß in $\mathfrak{A}_2$ das Glied mit v vorkommt. Wir führen dann durch die Gleichung $\mathfrak{A}_2(u, v) = v'$ eine neue Hilfsgröße v' statt v ein, die wir wieder mit v bezeichnen. Mit anderen Worten, wir nehmen $\mathfrak{A}_2(u, v) \equiv v$ an. Wir haben dann in der Umgebung von S

$$\mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = g, \quad \mathfrak{A}_4 = h,$$

wo g und h gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind, die für $u = v = 0$ verschwinden. Da $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthalten ist, so können wir die Stelle S so gewählt annehmen, daß durch S keine der in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltenen Kurven geht. Dann dürfen in S die $\mathfrak{Z}_\alpha$ (vgl. D, S. 184 (5), (6)) nicht sämtlich verschwinden. Es können also g und h nicht beide mit Gliedern zweiter oder höherer Dimension beginnen. Da wir durch Addition konstanter Vielfacher von $\mathfrak{A}_2$ zu $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$, also durch Koordinatentransformation das Glied mit v in g und h fortschaffen können, so muß in g oder h, etwa in g das Glied mit u vorkommen.

Indem wir statt u durch die Gleichung $\mathfrak{A}_3(u, v) = u'$ eine neue Veränderliche u' einführen, die wir dann wieder mit u bezeichnen, erreichen wir, daß $\mathfrak{A}_3(u, v) = u$ wird. Also haben wir in der Umgebung von S

$$\mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = u, \quad \mathfrak{A}_4 = h. \tag{25}$$

Nach (3) wird an der Stelle S $(u = v = 0)$

$$X = p_{13}, \quad Y = p_{12},$$

also, da $\mathfrak{R} = 1$, wegen (5) für $u = v = 0$

$$-\mathfrak{J} = L_0 p_{12}^2 - 2 M_0 p_{12} p_{13} + N_0 p_{13}^2, \tag{26}$$

wenn wir mit L_0, M_0, N_0 die Werte von L, M, N in S bezeichnen. Da aber durch S keine der Kurven $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ geht, so können L_0, M_0, N_0 nicht alle drei Null sein; sonst wäre ja wegen D, S. 190 (18) $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN$ in S Null. Aus (26) folgt daher, daß $\mathfrak{J}$ in S nicht verschwindet, daß also $\mathfrak{W}$ nicht durch S gehen kann. Es kann daher $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{W}$ enthalten sein.

Soll also $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{W}$ enthalten sein, so muß $\mathfrak{P}$ sicher in $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}'$ vorkommen. Es sei $\mathfrak{P}$ etwa in $\mathfrak{R}$ enthalten. Ist $\mathfrak{P}$ nicht auch in $\mathfrak{R}'$ enthalten, so ist in (20) $\mathfrak{r} = \mathfrak{w} = 0$, $\mathfrak{r}' \neq 0$, so daß wir aus (20) schließen, $\delta_1 = 0$; d. h. aber nach K, S. 191 (8), es ist $\mathfrak{P}$ eine Punktkurve. Ebenso folgt, daß $\mathfrak{P}$ eine Ebenenkurve ist, wenn $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{R}'$, aber nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Damit ist aber unser Satz bewiesen. Wir können ihm verschiedene Formen geben, nämlich:

Wenn an jeder regulären Stelle einer Primkurve $\mathfrak{P}$ ein ebener Schnitt von F ohne besondere Lage eine stationäre Tangente, aber keinen stationären Punkt hat, so ist $\mathfrak{P}$ eine ebene Kurve und die Ebene von $\mathfrak{P}$ berührt F längs $\mathfrak{P}$[2]).

Wenn an den regulären Stellen einer Primkurve $\mathfrak{P}$ die Berührungsebenen die Fläche F von höherer als erster Ordnung berühren, so ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ enthalten oder Ebenenkurve.

Und dual hierzu:

Wenn bei jedem Berührungskegel von F ohne besondere Lage, der F in einer regulären Stelle S einer Primkurve $\mathfrak{P}$ berührt, die durch S gehende Kante stationär ist, während die durch S gehende Ebene nicht stationär ist, so ist $\mathfrak{P}$ in einen Punkt kondensiert.

Wenn jede reguläre Stelle einer Primkurve $\mathfrak{P}$ als mehrfache Berührungsstelle ihrer Berührungsebene zählt, so ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}'$ enthalten oder Punktkurve.

Ähnlich folgt:

Durch eine isolierte Flachstelle geht immer eine in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Kurve.

4. Inflexionskurven und Inflexionstangenten.

Die Inflexionskurven werden durch die Differentialgleichung

$$Q_1(du, dv) = \mathfrak{S}_1 Q(du, dv) = 0 \tag{27}$$

definiert. Wir nennen die in $\mathfrak{S}_1$ enthaltenen Kurven *uneigentliche Inflexionskurven* und auch kurz $\mathfrak{S}_1$ *die uneigentliche Inflexionskurve*, während wir die der Gleichung

$$Q(du, dv) = 0 \tag{28}$$

genügenden Kurven *eigentliche Inflexionskurven* nennen.

Wie wir in K III, 3 gesehen haben, sind alle Punkt- und Ebenenkurven und alle Geraden von F Inflexionskurven, im einfachsten Falle eigentliche. Ferner ist an derselben Stelle gezeigt, daß alle ebenen oder Berührungskurven von F, die Inflexionskurven sind, entweder kondensiert sind oder Geraden.

Wir beweisen jetzt:

Eine Kurve $\mathfrak{P}$, die weder Punkt- noch Ebenenkurve und auch keine Gerade ist, ist dann und nur dann Inflexionskurve, wenn die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche $\overline{\mathfrak{P}}$ Tangentenfläche von $\mathfrak{P}$ ist oder, mit anderen Worten, wenn die Schmiegungsebenen von $\mathfrak{P}$ Ebenen von F sind.

---

[2]) Halphen, am unter [1]) a. O. p. 75.

Wir haben also zu beweisen, daß die $\mathfrak{a}'_\alpha$ zu den $\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha$ (vgl. (11)) proportional sind, wenn längs $\mathfrak{P}$ $Q_2(du, dv) = 0$ und daß umgekehrt $Q_2(du, dv) = 0$ längs $\mathfrak{P}$, wenn die $\mathfrak{a}'_\alpha$ zu den $\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha$ proportional sind. Bedenken wir, daß nach (11) die $\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha$ aus den $\mathfrak{A}'_\alpha$ für $\mathfrak{P} = 0$ hervorgehen, so ergeben sich unsere Behauptungen unmittelbar aus der Gleichung (II) in K, S. 196. Diese lautet unter Benutzung von K, S. 192 (13)

$$(29) \qquad \mathfrak{z}_1 \mathfrak{a}'_\alpha = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{aG(\mathfrak{A})} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} \left[\mathfrak{A}'_\alpha \sum G_k d^2 \mathfrak{A}_k - G_\alpha Q_2(du, dv) \right] \right\}.$$

Da $\mathfrak{P}$ nicht Punktkurve ist, so ist $\mathfrak{z}_1 \neq 0$. Ferner können wir die Fläche $G = 0$ immer so wählen, daß die G_α nicht proportional zu den $\mathfrak{A}'_\alpha$ sind für $\mathfrak{P} = 0$. Wir brauchen ja nur dafür zu sorgen, daß die Fläche $G = 0$ die Fläche F nicht längs $\mathfrak{P}$ berührt. Ferner könnte $\Sigma G_k d^2 \mathfrak{A}_k$ nur dann für jede Fläche $G = 0$ längs $\mathfrak{P}$ verschwinden, wenn längs $\mathfrak{P}$ die vier Differentiale $d^2 \mathfrak{A}_k$ Null würden, wenn also $\mathfrak{P}$ eine Gerade wäre. Es folgt also aus (29), daß die $\mathfrak{a}'_\alpha$ den $\bar{\mathfrak{a}}'_\alpha$ dann und nur dann proportional sind, wenn längs $\mathfrak{P}$ $Q_2(du, dv) = 0$ ist.

Wir beweisen ferner:

Eine eigentliche Inflexionskurve, die weder Punkt- noch Ebenenkurve ist, ist in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ immer in derselben Potenz enthalten.

Im allgemeinen ist diese Potenz die nullte, da eine Inflexionskurve ja nur ausnahmsweise algebraisch ist.

Ist $\mathfrak{P}$ eigentliche Inflexionskurve, so ist in (21) $\mathfrak{q} = 0$. Da $\mathfrak{P}$ nicht Punkt- oder Ebenenkurve ist, so ist $\mathfrak{z}_1 \neq 0$, $\bar{\mathfrak{z}}_3 \neq 0$. Es folgt also aus (21), daß auch $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{r}'_0$ nicht identisch Null sein können, daß also $\mathfrak{P}$ weder in $\mathfrak{R}_0$ noch in $\mathfrak{R}'_0$ enthalten ist. D. h. aber, es ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in derselben Potenz enthalten. Eine Erweiterung erfährt dieser Satz in Nr. 7.

Die Inflexionstangenten von F definieren wir jetzt als die Tangenten an die Inflexionskurven, soweit diese sich algebraisch verhalten. Wir nennen die so definierten Tangenten eigentliche Inflexionstangenten. Man könnte auch eine der folgenden Definitionen wählen. Sie liefern an besonderen Stellen von F nicht immer dieselben Tangenten.

a) Eine beliebige Tangente an der Stelle S habe mit F λ zusammenfallende Schnittpunkte. Man kann dann diejenigen Tangenten Inflexionstangenten nennen, die mehr als λ Schnittpunkte in S mit F haben. Diese Definition versagt, wenn S eine Stelle einer in einen Punkt H kondensierten Kurve ist. Dann kann man nicht gesondert angeben, wie viele Schnittpunkte eine Gerade in S mit F hat, sondern nur, wie viele in H.

b) Die Berührungsebene von F in der Stelle S schneidet F in einer durch S gehenden Kurve. Die Tangenten an die durch S gehenden Zweige kann man als Inflexionstangenten von F in S definieren.

c) und d) Man kann die Inflexionstangenten dual zu a) und b) definieren.

e) Es sei (p_{kl}) eine durch die Stelle S gehende Gerade ohne besondere Lage. Die Kurve $\mathfrak{J}_0$ geht dann durch S. Man kann die Tangenten von $\mathfrak{J}_0$ in S, wenn sie von den p_{kl} unabhängig sind, die Inflexionstangenten von F in S nennen.

Nach unserer Definition ist es selbstverständlich, daß die Tangenten einer Inflexionskurve eigentliche Inflexionstangenten sind. Es gilt aber nicht das Umgekehrte. Es können sehr wohl alle Tangenten einer Kurve $\mathfrak{P}$ eigentliche Inflexionstangenten sein, ohne daß $\mathfrak{P}$ Inflexionskurve ist. Es ist $\mathfrak{P}$ dann auf F eine Einhüllende der eigentlichen Inflexionskurven. Aber trotzdem braucht längs $\mathfrak{P}$ nicht $Q_2(du, dv)$ gleich Null zu sein. Das ist geometrisch leicht einzusehen. Es sei S eine Stelle von $\mathfrak{P}$ und es sei $\mathfrak{H}$ die durch S gehende Inflexionskurve. Nach Annahme berühren sich $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ in S. Daraus aber folgt noch nicht, daß ihre Schmiegungsebenen dieselben sind. Das müßte aber der Fall sein, wenn $\mathfrak{P}$ Inflexionskurve wäre, wenn also $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ eine Lösung von $Q_2(du, dv) = 0$ wäre. Wir betrachten ein einfaches Beispiel. Es sei für die Umgebung einer Stelle S von F

$$(30) \qquad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = v^2 + u^2, \quad \mathfrak{A}_4 = v^3 + u^2 + u^3.$$

Es ergibt sich mit Hilfe der Formeln in D:

$$(31) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = u, \quad \mathfrak{A}_1' = -2v^2 + 4v^3 - 3uv^2 + u^3, \quad \mathfrak{A}_2' = 4v + 6uv - 6v^2, \\ \mathfrak{A}_3' = -2 - 3u, \quad \mathfrak{A}_4' = 2, \end{cases}$$

$$(32) \qquad L = 6u, \quad M = 0, \quad N = 2 + 3u + 6v, \quad \mathfrak{S}_1 = 1.$$

Die Gleichung

$$(33) \qquad Q(du, dv) = 0$$

ergibt

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{3}\, u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2 + 3u + 6v}}.$$

Setzen wir

$$u = w^2, \qquad v - v_0 = \tau,$$

so folgt

$$(34) \qquad \frac{d\tau}{dw} = \frac{2\sqrt{3}\, w^2}{\sqrt{2 + 6v_0 + 3w^2 + 6\tau}} = P(w, \tau),$$

wo $P(w, \tau)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von w und τ ist, wenn nur

$2 + 6v_0 \neq 0$. Aus (34) ergibt sich für τ eine und nur eine gewöhnliche Potenzreihe von w, die für $w = 0$ verschwindet. Man findet, wenn man statt w wieder u einführt, als Lösung von (33)

$$v = v_0 + a_1 u^{3/2} + a_3 u^{5/2} + a_4 u^3 + \cdots \tag{35}$$

Die Koeffizienten hängen von v_0 ab und es ist v_0 die Integrationskonstante. Die Diskriminante von $Q(du, dv)$, nämlich

$$M^2 - LN = -6u(2 + 3u + 6v)$$

wird Null für $u = 0$. Die hierdurch definierte Kurve sei mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Wir betrachten zunächst die uv-Ebene. Die durch (35) definierte Kurvenschar heiße ($\mathfrak{G}$). Jede Kurve dieser Schar ist durch einen Wert von v_0 charakterisiert und sie hat im Punkte $u = 0$, $v = v_0$ eine Spitze, deren Tangente parallel zur u-Achse ist, also *senkrecht* zum Bilde $\mathfrak{Q}$ ist, das die Kurve $\mathfrak{P}$ in der uv-Ebene hat. Aber trotzdem *berühren* die Kurven, die den Kurven der Schar ($\mathfrak{G}$) auf F entsprechen, also die eigentlichen Inflexionskurven, die Kurve $\mathfrak{P}$, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Tangenten dieser Kurven bestimmt. Es ist aber $\mathfrak{P}$ weder eigentliche noch uneigentliche Inflexionskurve.

5. Zusammenhang zwischen $\mathfrak{J}_0$ und $Q(du, dv)$.

Es sei S eine Stelle von F. Es soll durch S entweder keine der in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltenen Primkurven gehen oder nur eine, und dann soll S keine besondere Stelle dieser Kurve sein. Die dadurch ausgeschlossenen Stellen von F seien *isolierte Inflexionsstellen* genannt. Ihre Anzahl ist endlich. Wir können dann annehmen, daß der Faktor n von dv^2 in

$$Q(du, dv) = l\,du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2 \tag{36}$$

an der Stelle S nicht verschwindet. Denn da in S die drei Funktionen l, m, n nicht alle drei Null werden, so können wir, wenn nötig, durch eine Transformation

$$u = u' + \alpha v', \qquad v = v', \tag{37}$$

wo α eine Konstante ist, neue Veränderliche u, v einführen. Dadurch geht Q über in

$$Q'(du', dv') = l\,du'^2 + 2m'\,du'\,dv' + n'\,dv'^2, \tag{38}$$

wo

$$n' = l\alpha^2 + 2m\alpha + n, \qquad m' = \alpha l + m, \tag{39}$$

so daß bei passender Wahl von α der Koeffizient n' an der Stelle S nicht Null wird. Wir nehmen also von vornherein an, daß n in S nicht verschwindet.

Wir setzen

$$Q(\xi,\eta) = n(\eta - \lambda\xi)(\eta - \mu\xi), \tag{40}$$

so daß wegen (12)

$$Q_2(\xi,\eta) = \mathfrak{S}_1 n(\eta - \lambda\xi)(\eta - \mu\xi). \tag{41}$$

Nach (5) wird

$$-\mathfrak{R}\mathfrak{J} = Q_2(-Y, X) = \mathfrak{S}_1 n(X + \lambda Y)(X + \mu Y). \tag{42}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(kl)_u = \mathfrak{A}_k \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u} - \mathfrak{A}_l \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}, \qquad (kl)_v = \mathfrak{A}_k \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v} - \mathfrak{A}_l \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} \tag{43}$$

und

$$g'_{kl} = (kl)_u + \lambda(kl)_v, \qquad g''_{kl} = (kl)_u + \mu(kl)_v, \tag{44}$$

so wird wegen (3) und (42)

$$-\mathfrak{R}\mathfrak{J} = -\mathfrak{R}\mathfrak{W}\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{S}_1 n \sum p_{kl} g'_{kl} \cdot \sum p_{kl} g''_{kl}. \tag{45}$$

Aus (36) ergibt sich

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(u,v) = \frac{1}{n}\{-m + \sqrt{m^2 - ln}\}, \\ \mu = \mu(u,v) = \frac{1}{n}\{-m - \sqrt{m^2 - ln}\}. \end{cases} \tag{46}$$

Daher lassen sich g'_{kl} und g''_{kl} in der Form schreiben

$$g'_{kl} = \gamma_{kl} + \delta_{kl}\sqrt{m^2 - ln}, \qquad g''_{kl} = \gamma_{kl} - \delta_{kl}\sqrt{m^2 - ln}. \tag{47}$$

Da $\mathfrak{W}$ nach Nr. 2 nur Primkurven enthält, die in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthalten sind, so können wegen (45) sämtliche g'_{kl} nur längs einer Kurve verschwinden, die in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ vorkommt. Dasselbe gilt von den g''_{kl}. Da ferner

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN = \mathfrak{S}_1^2(m^2 - ln), \tag{48}$$

so kann auch $m^2 - ln$ nur längs Kurven Null werden, die in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthalten sind. Da S keine isolierte Inflexionsstelle ist, so geht durch S entweder keine der in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltenen Kurven oder nur eine, und diese hat dann in S keine mehrfache Stelle.

Im ersten Falle ist $m^2 - ln$ in S nicht Null, so daß λ, μ und die g'_{kl}, g''_{kl} gewöhnliche Potenzreihen von u, v werden. Würden die g'_{kl} oder die g''_{kl} in diesem Falle sämtlich in S verschwinden, so könnte das wegen (45) nur daher kommen, daß die $\mathfrak{J}_0$-Kurven alle durch S gingen, daß also S eine isolierte Flachstelle wäre, was nach dem Schluß von Nr. 3 nicht möglich ist.

Im zweiten Falle sei $\mathfrak{H}$ diejenige in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Primkurve, die durch S geht. Die zugeordnete Funktion $\mathfrak{H}(u,v)$ enthält Glieder erster

Ordnung, da $\mathfrak{H}$ in S keine mehrfache Stelle hat, und wir können annehmen, daß die erste Potenz von v in $\mathfrak{H}(u,v)$ vorkommt. Dann können wir durch die Gleichung $\mathfrak{H}(u,v)=v'$ statt v eine neue Hilfsgröße v' einführen, die wir dann wieder mit v bezeichnen. Wir können mit andern Worten von vornherein annehmen, daß die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{H}$ gleich v ist. Es ist dann

$$m^2 - ln = v^\varepsilon e(u,v), \tag{49}$$

wo $\varepsilon \geqq 0$ und wo $e(u,v)$ für $u=v=0$ nicht verschwindet, weil sonst außer $\mathfrak{H}$ noch eine andere in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Primkurve durch S ginge. Es wird also

$$\sqrt{m^2 - ln} = v^{\frac{\varepsilon}{2}} e_1(u,v), \tag{50}$$

wo auch $e_1(u,v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist, die für $u=v=0$ nicht verschwindet. Es werden also λ, μ und die g'_{kl}, g''_{kl} gewöhnliche Potenzreihen von u, v, wenn ε grade, und von $u, v^{\frac{1}{2}}$, wenn ε ungrade. Aus (48) und (49) ergibt sich noch, wenn $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in der ϱ- und ϱ'-ten Potenz enthalten ist, daß ε gleichzeitig mit $\varrho+\varrho'$ grade oder ungrade ist.

Die g'_{kl} und g''_{kl} können längs $\mathfrak{H}$ Null werden, aber nicht längs einer anderen durch S gehenden Kurve. Wir setzen

$$g'_{kl} = v^{\delta_1} h'_{kl}, \qquad g''_{kl} = v^{\delta_2} h''_{kl}, \tag{51}$$

wo die h'_{kl}, h''_{kl} gewöhnliche Potenzreihen von u, v oder $u, v^{\frac{1}{2}}$ sein sollen, die nicht alle für $v=0$ identisch verschwinden. Diese Gleichungen lassen wir auch in dem ersten Falle gelten, indem wir dann $\delta_1=\delta_2=0$ setzen. Aus (45) und (51) folgt

$$-\mathfrak{R}\mathfrak{W}\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{S}_1 v^{\delta_1+\delta_2} n \sum' p_{kl} h'_{kl} \cdot \sum p_{kl} h''_{kl}, \tag{52}$$

woraus wir schließen, daß $\mathfrak{R}\mathfrak{W}\mathfrak{S}_1^{-1}$ genau durch $v^{\delta_1+\delta_2}$ teilbar sein muß. Setzen wir

$$\mathfrak{S}_1^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{W} = v^{\delta_1+\delta_2} E_1(u,v), \tag{53}$$

so muß E_1 eine Einheit sein, da außer $\mathfrak{H}$ keine der in $\mathfrak{R}\mathfrak{W}$ enthaltenen Kurven durch S geht. Da auch n eine Einheit ist, so folgt aus (52) und (53)

$$\mathfrak{J}_0 = E(u,v) \sum' p_{kl} h'_{kl} \cdot \sum p_{kl} h''_{kl}, \tag{54}$$

wo E eine Einheit für die Stelle S ist. Die h'_{kl} und ebenso die h''_{kl} werden an der Stelle S dann und nur dann sämtlich Null, wenn S eine isolierte Wendestelle ist.

6. Verhalten der Inflexionskurven in der Umgebung einer regulären Stelle einer Kurve $\mathfrak{P}$.

Wir betrachten die Inflexionstangenten an der Stelle S. Dazu haben wir Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v), \qquad \frac{dv}{du} = \mu(u, v) \tag{55}$$

zu bestimmen, die für $u = 0$ verschwinden. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

a) *Der Exponent ε in* (49) *ist grade.*

Dann sind λ und μ gewöhnliche Potenzreihen von u, v und jede der Gleichungen (55) hat nach bekannten Sätzen eine und nur eine Lösung für v, die für $u = 0$ verschwinden. Wir bezeichnen sie mit v_1 und v_2. Es sind v_1 und v_2 als gewöhnliche Potenzreihen von u darzustellen. Die Funktionen v_1 und v_2 können identisch sein, obwohl bei unsern Voraussetzungen λ und μ verschieden sind. Wenn nämlich λ und μ durch v teilbar sind, sind v_1 und v_2 identisch Null.

b) *Es sei ε ungrade und m durch v teilbar.*

Die Gleichungen (55) haben dann die Form

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = v^{\delta}\lambda_1(u, v) + v^{\frac{\varepsilon}{2}}\lambda_2(u, v), \\ \dfrac{dv}{du} = v^{\delta}\lambda_1(u, v) - v^{\frac{\varepsilon}{2}}\lambda_2(u, v), \end{cases} \tag{56}$$

wo λ_1, λ_2 gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind, und zwar nach (50) λ_2 eine Einheit. Wir haben zunächst die Lösung $v_1 = 0$. Ferner setzen wir

$$v = w^2 \tag{57}$$

und erhalten

$$2\frac{dw}{du} = w^{2\delta-1}\lambda_1(u, w^2) \pm w^{\varepsilon-1}\lambda_2(u, w^2). \tag{58}$$

Wenn $\varepsilon > 1$, so haben diese Gleichungen nur die Lösung $w = 0$, so daß auch die zweite Lösung v_2 der Gleichungen (56) identisch Null ist. Wenn $\varepsilon = 1$, so hat jede der Gleichungen (58) eine und nur eine Lösung für w, die für $u = 0$ verschwindet. Diese beiden Lösungen unterscheiden sich aber nur durch das Vorzeichen, so daß wir wegen (57) für v nur noch eine Lösung v_2 erhalten, die für $u = 0$ verschwindet.

c) *Es sei ε ungrade, m nicht durch v teilbar und m nicht Null für $u = v = 0$.*

Wir setzen wieder $v = w^2$ und erhalten zwei Gleichungen

$$w\frac{dw}{du} = \lambda_1(u, w), \qquad w\frac{dw}{du} = \mu_1(u, w), \tag{59}$$

wo λ_1 und μ_1 gewöhnliche Potenzreihen von u, w sind, die für $u = w = 0$ nicht verschwinden. Die beiden Gleichungen gehen ineinander über, wenn man das Vorzeichen von w ändert. Aus ihnen folgt

$$\frac{du}{dw} = w\lambda_2(u, w), \qquad \frac{du}{dw} = w\mu_2(u, w), \tag{60}$$

wo λ_2 und μ_2 gewöhnliche Potenzreihen von u, w sind. Jede dieser Gleichungen hat eine und nur eine Lösung für u, die eine gewöhnliche Potenzreihe von w ist und für $w = 0$ verschwindet. Die Lösungen seien $u_1(w)$ und $u_2(w)$. Es ist identisch

$$u_2(w) = u_1(-w). \tag{61}$$

Da λ_2 und μ_2 Einheiten sind, so beginnen die Entwicklungen der rechten Seiten von (60) genau mit w^1, so daß u_1 und u_2 genau durch w^2 teilbar werden. Daher ergibt sich aus $u = u_1(w)\ w$ als gewöhnliche Potenzreihe von $u^{\frac{1}{2}}$, und aus $u = u_2(w)$ ergibt sich $-w$ als dieselbe Potenzreihe von $u^{\frac{1}{2}}$. Wir erhalten daher für v wegen (57) *eine* Lösung, die nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{2}}$ fortschreitet und für $u = 0$ verschwindet. Sie beginnt mit der ersten Potenz von u. Sie sei bezeichnet mit $v_1(u)$. Es genügt $v_1(u)$ bei passender Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{m^2 - ln}$ der ersten der Gleichungen (55), und es ist die Reihe, die aus $v_1(u)$ durch Vertauschen von $\sqrt{u}$ mit $-\sqrt{u}$ hervorgeht, die Lösung der zweiten Gleichung (55). Diese Lösung sei mit $v_2(u)$ bezeichnet. Es sind aber $v_1(u)$ und $v_2(u)$ zwei in u zusammenhängende Zweige *einer* Funktion.

d) *Es sei ε ungrade, m nicht durch v teilbar, aber Null für $u = v = 0$.*

Wenn nicht auch l für $u = v = 0$ verschwindet, so wenden wir die Transformation (37) an und erreichen nach (39), daß das neue m nicht Null wird für $u = v = 0$. Wir haben dann den Fall c). Wird aber auch l Null für $u = v = 0$, so wollen wir die Stelle S mit zu den isolierten Inflexionsstellen rechnen. Stellen dieser Art gibt es nur endlich viele. Denn durch eine dieser Stellen muß eine in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Kurve $\mathfrak{P}$ gehen, da ε ungrade und also größer als Null ist. Und wenn man die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ gleich v annimmt, so müssen l und m an der Stelle verschwinden, ohne längs $\mathfrak{P}$ Null zu werden.

Wir haben also folgendes Ergebnis, wenn wir noch beachten, daß ε und $\varrho + \varrho'$ beide grade oder beide ungrade sind.

Es sei S eine Stelle von F, die nicht isolierte Inflexionsstelle ist. Wenn durch S eine in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Kurve geht, sei sie mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet und in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten und in $\mathfrak{R}'$ in der ϱ'-ten Potenz enthalten. Geht durch S keine der in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltenen Kurven, so ist $\varrho = \varrho' = 0$ zu setzen.

I. $\mathfrak{H}$ ist nicht eigentliche Inflexionskurve.

Ia. $\varrho + \varrho'$ grade. Dann gehen durch S zwei verschiedene Inflexionskurven (oder zwei Zweige einer Inflexionskurve, die aber in S nicht analytisch zusammenhängen). Bei passender Wahl der Hilfsgrößen u, v sind die Kurven definiert durch

$$v = v_1(u), \qquad v = v_2(u),$$

wo v_1 und v_2 gewöhnliche Potenzreihen von u sind.

Ib. $\varrho + \varrho'$ ungrade. Es geht durch S nur ein Zweig einer Inflexionskurve. Sie ist bei passender Wahl der Hilfsgrößen u, v definiert durch $v = v_1(u)$, wo $v_1(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $u^{\frac{1}{2}}$ ist. Wir bezeichnen die Reihe, die aus v_1 entsteht, wenn wir $\sqrt{u}$ durch $-\sqrt{u}$ ersetzen, mit $v_2(u)$.

II. $\mathfrak{H}$ ist eigentliche Inflexionskurve.

IIa. Es ist $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$. Dann geht außer $\mathfrak{H}$ noch eine zweite Inflexionskurve durch S. Sie sei definiert durch $v = v_1(u)$, wo v_1 eine gewöhnliche Potenzreihe von u ist. $\mathfrak{H}$ selbst sei definiert durch $v = v_2(u)$.

IIb. Es ist $\varepsilon > 1$. Es geht nur die Inflexionskurve $\mathfrak{H}$ durch S. Sie sei definiert durch $v = v_1(u)$, wo v_1 eine gewöhnliche Potenzreihe von u sei. Wir bezeichnen dann v_1 auch mit v_2.

In allen Fällen bestehen bei passender Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{m^2 - ln}$ die Gleichungen

$$\frac{dv_1}{du} = \lambda(u, v_1), \qquad \frac{dv_2}{du} = \mu(u, v_2). \tag{62}$$

7. Die eigentlichen Inflexionstangenten.

Es sei S eine Stelle von F, die nicht isolierte Inflexionsstelle ist. Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die durch S gehenden Inflexionskurven, wobei nicht ausgeschlossen sein soll, daß $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ identisch sind. Sie seien in der Umgebung von S definiert durch

$$v = v_1(u), \qquad v = v_2(u). \tag{63}$$

Wenn wir die sich auf $\mathfrak{P}_\alpha$ beziehenden Größen mit dem oberen Index α versehen, finden wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_k^{(\alpha)} d\,\mathfrak{a}_l^{(\alpha)} - \mathfrak{a}_l^{(\alpha)} d\,\mathfrak{a}_k^{(\alpha)} &= \{\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k\}_{v=v_\alpha} \\ &= \left[\left\{(kl)_u + \frac{dv}{du}(kl)_v\right\} du\right]_{v=v_\alpha} \end{aligned} \tag{64}$$

oder wegen (44), (62) und K, S. 190, (2)

$$(65) \qquad \mathfrak{z}_1^{(1)}\,\mathfrak{a}_{kl}^{(1)} = \{g'_{kl}\,du\}_{v=v_1}, \qquad \mathfrak{z}_1^{(2)}\,\mathfrak{a}_{kl}^{(2)} = \{g''_{kl}\,du\}_{v=v_2}.$$

Geht durch S eine in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthaltene Primkurve $\mathfrak{H}$, so sei v ihre zugeordnete Funktion. Dann folgt aus (51) und (65)

$$(66) \qquad \mathfrak{z}_1^{(1)}\,\mathfrak{a}_{kl}^{(1)} = \{v^{\delta_1} h'_{kl}\,du\}_{v=v_1}, \qquad \mathfrak{z}_1^{(2)}\,\mathfrak{a}_{kl}^{(2)} = \{v^{\delta_2} h''_{kl}\,du\}_{v=v_2}.$$

Ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{W}, \mathfrak{S}_1$ in den Potenzen $\varrho, \varrho', \varphi, \sigma_1$ enthalten, so ist nach (53)

$$(67) \qquad \delta_1 + \delta_2 = \varrho + \varphi - \sigma_1.$$

Ferner ist wegen (48)

$$(68) \qquad \varepsilon = \varrho + \varrho' - 2\sigma_1.$$

Wir können jetzt folgenden Satz beweisen:

Wenn eine Primkurve $\mathfrak{H}$, die weder Punktkurve noch Ebenenkurve ist, eigentliche Inflexionskurve ist, so ist sie in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}_1$ in derselben Potenz enthalten.

Nach einem Satze in Nr. 4 ist

$$(69) \qquad \varrho = \varrho',$$

also wegen (68)

$$(70) \qquad \varepsilon = 2(\varrho - \sigma_1).$$

Daher ist ε eine grade Zahl. Wäre also ε nicht Null, so ist $\varepsilon > 1$. Dann sind aber, wenn wir die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{H}$ gleich v annehmen, nach IIb in voriger Nummer v_1 und v_2 identisch Null. Da $\mathfrak{H}$ nicht Punktkurve ist, so sind $\mathfrak{z}_{\delta_1}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}_{\delta_2}^{(2)}$, die jetzt beide gleich $\mathfrak{z}_{\delta_1}$ sind, nicht identisch Null. Daher folgt aus (66)

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

und wegen (67)

$$\varrho + \varphi - \sigma_1 = 0$$

und in Verbindung mit (70)

$$\varepsilon + 2\varphi = 0.$$

Das aber geht nicht, da $\varphi \geqq 0$, $\varepsilon > 0$. Es ist also $\varepsilon = 0$, und aus (69) und (70) folgt, wie behauptet,

$$\varrho = \varrho' = \sigma_1.$$

Ist S keine isolierte Flachstelle, so werden die h'_{kl} und die h''_{kl} nicht alle Null in S. Daher folgt aus (66)

$$(71) \qquad \mathfrak{a}_{kl}^{(1)} = \{h'_{kl}\}_{v=v_1}, \qquad \mathfrak{a}_{kl}^{(2)} = \{h''_{kl}\}_{v=v_2}.$$

Es sind die $a_{kl}^{(1)}$ und die $a_{kl}^{(2)}$ die Plückerschen Linienkoordinaten der Tangenten von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, also für $u = 0$ der Inflexionstangenten von F in S. Durch Vergleich mit (54) sehen wir, daß $\mathfrak{J}_0$ in S dann und nur dann verschwindet, wenn eine der Inflexionstangenten die Gerade (p_{kl}), mit deren Hilfe $\mathfrak{J}_0$ gebildet ist, schneidet. Wenn S eine reguläre Stelle ist, folgt das schon aus der Definition von $\mathfrak{J}_0$. Ist S eine isolierte Flachstelle, so rechnen wir alle Tangenten von F in S zu den eigentlichen Inflexionstangenten. Ist S eine isolierte Inflexionsstelle, aber keine Flachstelle, so müssen in S nach Gl. (45) die Verhältnisse der g'_{kl} und die der g''_{kl} bestimmte Werte annehmen, so daß wir setzen können

$$g'_{kl} = f' h'_{kl}, \qquad g''_{kl} = f'' h''_{kl},$$

wo f' oder f'' oder beide in S verschwindende Faktoren sind, während nicht alle h'_{kl} und nicht alle h''_{kl} in S Null werden. Geht dann durch S eine eigentliche Inflexionskurve $\mathfrak{P}_1$, die sich in S algebraisch verhält, und die etwa durch $v = v_1(u)$ definiert ist, so folgt geradeso wie im Anfang dieser Nummer, daß bei passender Wahl der Bezeichnung die Größen

$$\{h'_{kl}\}_{v=v_1}$$

die Linienkoordinaten der Tangenten von $\mathfrak{P}_1$ in der Umgebung von S sind. Es gibt also in S höchstens zwei Inflexionstangenten und ihre Koordinaten sind die Werte, die die h'_{kl} und die h''_{kl} in S annehmen. Jedenfalls geht $\mathfrak{J}_0$ im allgemeinen nicht durch eine solche Stelle und es geht auch keine der Inflexionstangenten der Stelle durch die Gerade g, zu der $\mathfrak{J}_0$ gehört. Wir können daher sagen:

Die Kurve $\mathfrak{J}_0$, die zu einer Geraden g gehört, geht bei nicht besonderer Lage von g durch die Stellen S von F und nur durch die, deren eine eigentliche Inflexionstangente g schneidet.

Wir können daher die Inflexionstangenten auch folgendermaßen definieren:

Ist S keine isolierte Flachstelle und ist an der Stelle S

$$\mathfrak{J}_0 = \sum p_{kl} a'_{kl} \cdot \sum p_{kl} a''_{kl}, \tag{72}$$

so sind die a'_{kl} und die a''_{kl} die Plückerschen Koordinaten zweiter Art zweier Geraden. Diese sollen die Inflexionstangenten von F in S heißen, und zwar eigentliche. Wird $\mathfrak{J}_0$ an einer Stelle S für alle Werte der p_{kl} Null, ist also S eine isolierte Flachstelle, so soll jede Tangente von F in S eigentliche Inflexionstangente heißen. Schließlich nennen wir jede Tangente von F in einer Stelle der Flachkurve $\mathfrak{W}$ eine uneigentliche Inflexionstangente.

Wir haben dann auch:

Ist S eine Stelle der Kurve $\mathfrak{J} = \mathfrak{W}\mathfrak{J}_0$ und ist g die Gerade, zu der $\mathfrak{J}$ gehört, so geht eine der Inflexionstangenten durch g und umgekehrt liegt S auf $\mathfrak{J}$, wenn eine der Inflexionstangenten von S durch g geht.

8. Über die in $\mathfrak{R}$ und die in $\mathfrak{R}'$ enthaltenen Kurven.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primkurve auf F und $\mathfrak{P}$ die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche. Es sei $\mathfrak{P}$ in den Kurven

$$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{W}, \mathfrak{S}_1$$

in den Potenzen

$$\varrho, \varrho', \varphi, \sigma_1$$

enthalten. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

I. *Es sei $\varrho > \varrho'$ und $\mathfrak{P}$ keine Punktkurve.*

Es ist dann in (21) $\mathfrak{r}_0 = 0$, $\mathfrak{r}_0' \neq 0$, $\mathfrak{z}_1 \neq 0$, so daß wir erhalten

$$\mathfrak{r}_0' \mathfrak{z}_1^2 \left\{\sum p_{kl} a_{kl}\right\}^2 = \mathfrak{w}_0 \mathfrak{i}_0 \mathfrak{q} = \mathfrak{w}_0 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{q}. \tag{73}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nicht identisch Null ist, so gilt dasselbe von der rechten. Es ist also $\mathfrak{q}$ nicht Null, d. h. $\mathfrak{P}$ ist keine eigentliche Inflexionskurve, was schon aus Nr. 7 folgt. Es ist ferner $\mathfrak{w}_0$ nicht Null, d. h. es ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{W}_0$ nicht enthalten. Wegen (14) folgt daraus

$$\varphi = \varrho' - \sigma_1.$$

Die a_{kl} sind ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler, so daß $\Sigma p_{kl} a_{kl}$ ein ganzer Divisor ohne einen von den p_{kl} unabhängigen Teiler ist. Dasselbe gilt von $\mathfrak{i}_2$. Daher ist

$$\left\{\sum p_{kl} a_{kl}\right\}^2 = \mathfrak{i}_2; \quad \mathfrak{r}_0' \mathfrak{z}_1^2 = \mathfrak{w}_0 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{q}. \tag{74}$$

Es ist also

$$\{\mathfrak{J}_0\}_{\mathfrak{W}=0} = \mathfrak{i}_1 \left\{\sum p_{kl} a_{kl}\right\}^2. \tag{75}$$

Nach der Definition der Inflexionstangenten am Schlusse von Nr. 7 fallen also längs $\mathfrak{P}$ die Inflexionstangenten zusammen und sind die Tangenten von $\mathfrak{P}$. Es ist aber, wie wir sahen, $\mathfrak{P}$ keine eigentliche Inflexionskurve und im allgemeinen auch keine uneigentliche. Man vergleiche das Beispiel am Schlusse von Nr. 4. Auch ist $\overline{\mathfrak{P}}$ im allgemeinen nicht die Tangentenfläche von $\mathfrak{P}$.

Da die Ordnung der a_{kl} gleich dem Range $r_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (74) und aus (23)

$$r_{\mathfrak{P}} = \frac{1}{2}\{\mathfrak{P}, \mathfrak{J}_0\}. \tag{76}$$

Hat $\mathfrak{P}$ nur bewegliche Schnittpunkte mit den $\mathfrak{J}_0$-Kurven, und ist $\mathfrak{W}=1$, so wird einfacher

$$r_{\mathfrak{P}}=\frac{1}{2}(\mathfrak{P},\mathfrak{J}).$$

Im Anschlusse hieran nennen wir die Zahl

$$r=\frac{1}{2}(\mathfrak{R},\mathfrak{J}) \tag{77}$$

den virtuellen Rang von $\mathfrak{R}$ und dual entsprechend

$$r'=\frac{1}{2}(\mathfrak{R}',\mathfrak{J}) \tag{78}$$

die virtuelle Ordnung von $\mathfrak{R}'$ oder genauer von $\overline{\mathfrak{R}}'$.

II. *Es sei $\varrho'>\varrho$ und $\mathfrak{P}$ keine Ebenenkurve.*

Dieser Fall ist dual zu dem vorigen.

III. *Es sei $\varrho=\varrho'>0$.*

Wie wir in Nr. 7 gesehen haben, kann in diesem Falle $\mathfrak{P}$ eigentliche Inflexionskurve sein, so daß $\overline{\mathfrak{P}}$ die Tangentenfläche von $\mathfrak{P}$ ist und die Tangenten von $\mathfrak{P}$ Inflexionstangenten von F. Es kann aber auch sein, daß die Tangenten von $\mathfrak{P}$, die Geraden von $\overline{\mathfrak{P}}$ und die beiden Inflexionstangenten von F in den Stellen von $\mathfrak{P}$ voneinander verschieden sind. Es sei z. B.

$$\mathfrak{A}_1=1,\quad \mathfrak{A}_2=v,\quad \mathfrak{A}_3=v^2+u^3+u^4,\quad \mathfrak{A}_4=v^3+u^2+u^5. \tag{79}$$

Es sei $\mathfrak{P}$ die durch $u=0$ definierte Kurve. Es wird mit Hilfe der Formeln in D

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{R}=u, & \mathfrak{A}_1'=-2v^2+4v^3-2u^4+3u^5-5u^3v^2+8u^2v^3+u^7,\\ & \mathfrak{A}_2'=4v-6v^2+10u^3v-12u^2v^2,\\ & \mathfrak{A}_3'=-2-5u^3,\quad \mathfrak{A}_4'=2+4u^2, \end{array}\right. \tag{80}$$

$L=-2u^2(8-15u-10u^3)$, $M=0$, $N=-4+12v-10u^3+24u^2v$.

Es wird $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'=M^2-LN=-LN$ durch u^2 teilbar, also $\mathfrak{R}'$ durch u, so daß

$$\varrho=\varrho'=1.$$

Da N nicht durch u teilbar ist, so ist $\sigma_1=0$.

Für $\mathfrak{P}=0$, d. i. $u=0$, gehen die $\mathfrak{A}_\alpha$ in $\mathfrak{a}_\alpha$ und die $\mathfrak{A}_\alpha'$ in $\bar{\mathfrak{a}}_\alpha'$ über und wir finden für die Koordinaten $\mathfrak{a}_{kl}$ und $\bar{\mathfrak{a}}_{kl}'$ der Tangenten von $\mathfrak{P}$ und der Geraden von $\overline{\mathfrak{P}}$ nach K I, 1 (2) und I, 4 (13) aus (79), (80)

$$\mathfrak{a}_{12}=1,\quad \mathfrak{a}_{13}=2v,\quad \mathfrak{a}_{14}=3v^2,\quad \mathfrak{a}_{23}=v^2,\quad \mathfrak{a}_{24}=2v^3,\quad \mathfrak{a}_{34}=v^4, \tag{81}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}_{13}'=0,\quad \bar{\mathfrak{a}}_{13}'=1,\quad \bar{\mathfrak{a}}_{14}'=1,\quad \bar{\mathfrak{a}}_{23}'=v,\quad \bar{\mathfrak{a}}_{24}'=-v,\quad \bar{\mathfrak{a}}_{34}'=v^2-v^3. \tag{82}$$

Wir berechnen auch noch die Linienkoordinaten zweiter Art der Inflexionstangenten von F in den Stellen von $\mathfrak{P}$. Setzen wir

$$X_0 = 2p_{13} + 2p_{14} + 2p_{23}v + 2p_{24}v + 2p_{34}(v^2 - v^3),$$
$$Y_0 = p_{12} + 2p_{13}v + 3p_{14}v^2 + p_{23}v^2 + 2p_{24}v^3 + p_{34}v^4,$$
$$L_0 = 4, \quad N_0 = 1 - 3v,$$

so wird

$$X = X_0 u + (u^2), \quad Y = Y_0 + (u)$$

und nach (5)

$$\mathfrak{R}\mathfrak{J} = u\mathfrak{J} = -\{LY^2 - NX^2\} = 4u^2\{L_0 Y_0^2 + N_0 X_0^2\} + (u^3).$$

Es wird also $\mathfrak{J}$ durch u, d. i. durch $\mathfrak{P}$ teilbar, so daß $\mathfrak{P}$ Flachkurve ist ($\varphi = 1$). Es wird, wenn wir den Faktor 4 fortlassen,

$$\mathfrak{J}_0 = \{L_0 Y_0^2 + N_0 X_0^2\} + (u).$$

Um die Plückerschen Koordinaten der Inflexionstangenten längs $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, haben wir nach dem Schluß von Nr. 7 $u = 0$ zu setzen und $\mathfrak{J}_0$ in zwei in den p_{kl} lineare Faktoren zu zerlegen. Es wird für $u = 0$

$$\{\mathfrak{J}_0\}_{u=0} = \{2Y_0 + X_0\sqrt{3v-1}\}\{2Y_0 - X_0\sqrt{3v-1}\}.$$

Setzen wir den ersten Faktor gleich $\Sigma p_{kl} h'_{kl}$, den zweiten gleich $\Sigma p_{kl} h''_{kl}$, so sind nach Nr. 7 die h'_{kl} und h''_{kl} die gesuchten Koordinaten. Wir finden, wenn wir $\sqrt{3v-1} = w$ setzen,

(83)
$$h'_{12} = 1, \quad h'_{13} = 2v + w, \quad h'_{14} = 3v^2 + w, \quad h'_{23} = v^2 + vw,$$
$$h'_{24} = 2v^3 + vw, \quad h'_{34} = v^4 + (v^2 - v^3)w.$$

Es geht h''_{kl} aus h'_{kl} durch Vertauschen von w mit $-w$ hervor.

Durch Vergleich von (81), (82), (83) ersieht man, daß die Tangenten von $\mathfrak{P}$, die Geraden von $\overline{\mathfrak{P}}$ und die beiden Inflexionstangenten in den Stellen von $\mathfrak{P}$ alle vier voneinander verschieden sind.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primkurve auf F und $\overline{\mathfrak{P}}$ die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche. Es sei $\mathfrak{P}$ in den Kurven $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{S}_1$ in den Potenzen ϱ, ϱ', ψ, σ_1 enthalten.

I. *Es sei $\varrho > \varrho'$ und $\mathfrak{P}$ keine Punktkurve. Dann ist*

(84)
$$\varphi = \varrho' - \sigma_1.$$

Ferner fallen längs $\mathfrak{P}$ die Inflexionstangenten zusammen und sind die Tangenten von $\mathfrak{P}$. Es ist $\mathfrak{P}$ keine eigentliche Inflexionskurve.

II. *Es sei $\varrho < \varrho'$ und keine Ebenenkurve. Dann ist*

(85)
$$\varphi = \varrho - \sigma_1.$$

Es fallen längs $\mathfrak{P}$ *die Inflexionstangenten zusammen und sind die Geraden von* $\overline{\mathfrak{P}}$. *Es ist* $\mathfrak{P}$ *keine eigentliche Inflexionskurve.*

III. *Es sei* $\varrho = \varrho'$. *In diesem Falle läßt sich nichts Bestimmtes aussagen. Wir wissen nur: wenn* $\mathfrak{P}$ *eigentliche Inflexionskurve ist, so ist*

$$\varrho = \varrho' = \sigma_1. \tag{86}$$

II. Über die Zahlen $\varrho, \varrho', \varphi, \sigma_1$.

Es sei $\mathfrak{P}$ wieder eine Primkurve auf F und $\overline{\mathfrak{P}}$ die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche. Die Zahlen ϱ, ϱ', φ, σ_1 sollen dieselbe Bedeutung haben wie früher. Es sei S eine reguläre Stelle von $\mathfrak{P}$. Dann kommt in der zugeordneten Funktion $\mathfrak{P}(u, v)$ mindestens ein lineares Glied vor, etwa u. Dann führen wir durch die Gleichung $\mathfrak{P}(u, v) = u'$ eine neue Veränderliche u' statt u ein und schreiben wieder u für u'. Mit anderen Worten, wir nehmen die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ gleich u an.

Wir haben verschiedene Fälle zu unterscheiden. Den Fall, wo $\mathfrak{P}$ gleichzeitig Punkt- und Ebenenkurve ist, behandeln wir nicht.

1. $\mathfrak{P}$ sei Punktkurve und $\overline{\mathfrak{P}}$ Gerade.

Es sind also die Berührungsebenen in den Stellen von $\mathfrak{P}$ beweglich und gehen alle durch dieselbe Gerade. Der Punkt, in den $\mathfrak{P}$ kondensiert ist, heiße H und sei die Ecke 1 des Koordinatentetraeders. Wir können dann $\mathfrak{A}_1 = 1$ annehmen. Eine beliebige durch H gehende Ebene enthalte $\mathfrak{P}$ α-mal und es sei $y_2 = 0$ eine solche Ebene ohne besondere Lage. Dann ist in der Umgebung der regulären Stelle S von $\mathfrak{P}$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}_2$ von der Form $u^\alpha a_2$, wo a_2 eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Wir können annehmen, daß $a_2(0,0) \neq 0$. Sonst würden wir von der Stelle $S(u = v = 0)$ zu einer benachbarten $u = 0, v = v_0$ übergehen und für $v - v_0$ wieder v schreiben. Wir führen durch die Gleichung $u^\alpha a_2 = u'^\alpha$ statt u eine neue Hilfsgröße u' ein, für die wir dann wieder u schreiben, so daß $\mathfrak{A}_2 = u^\alpha$ wird.

Die Gerade $\overline{\mathfrak{P}}$ sei die Gerade $y_3 = y_4 = 0$ oder $y_1' = y_2' = 0$. Dann werden $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ durch eine höhere Potenz von u als die α-te teilbar, etwa durch die β-te. Es werde $\mathfrak{A}_3$ genau durch u^β teilbar. Wenn es unter den durch $\overline{\mathfrak{P}}$ gehenden Ebenen eine gibt, die durch eine höhere Potenz von u als die β-te teilbar wird, so sei $y_4 = 0$ diese Ebene. Es sei $\mathfrak{A}_4$ durch u^γ teilbar, so daß

$$\alpha < \beta \leqq \gamma.$$

Wir setzen $\mathfrak{A}_3 = u^\beta b$, $\mathfrak{A}_4 = u^\gamma c$, so daß in der Umgebung von S

$$\mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = u^\alpha, \quad \mathfrak{A}_3 = u^\beta b, \quad \mathfrak{A}_4 = u^\gamma c. \tag{1}$$

Bezeichnen wir die Ableitungen nach u, v durch Hinzufügen der Indizes 1, 2, so finden wir mit Hilfe der Formeln in D

$$2)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = \{(\beta-\alpha)\,b\,c_2 - (\gamma-\alpha)\,b_2\,c - (b_2 c_1 - b_1 c_2)\,u\}\,u^{\alpha+\beta+\gamma-1}, \\ \mathfrak{Z}_2 = \{\gamma\,b_2\,c - \beta\,b\,c_2 + (b_2 c_1 - b_1 c_2)\,u\}\,u^{\beta+\gamma-1}, \\ \mathfrak{Z}_3 = \alpha\,c_2\,u^{\alpha+\gamma-1}, \qquad \mathfrak{Z}_4 = -\alpha\,b_2\,u^{\alpha+\beta-1}. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{P}$ die Gerade $y_1' = y_2' = 0$ ist, so dürfen nur $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ durch u teilbar sein, aber nicht $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_4'$ und es darf auch keine Konstanten c_3, c_4 geben, so daß $c_3\,\mathfrak{A}_3' + c_4\,\mathfrak{A}_4'$ durch u teilbar wird. Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Es sei b_2 nicht durch u teilbar. Es sei also der Faktor von u^β in $\mathfrak{A}_3$, wenn wir $\mathfrak{A}_3$ als Potenzreihe von u schreiben, nicht konstant, sondern von v wirklich abhängig. Es ist dann $\mathfrak{Z}_4$ genau durch die $(\alpha+\beta-1)$-te Potenz von u teilbar und wegen (2) sind die andern $\mathfrak{Z}_\alpha$ mindestens durch diese Potenz teilbar. Soll $\mathfrak{A}_3'$ nicht durch u teilbar sein, so muß $\gamma = \beta$ sein und es darf c_2 nicht durch u teilbar sein. Indem wir ein konstantes Vielfaches von $\mathfrak{A}_4$ von $\mathfrak{A}_3$ subtrahieren, also durch Koordinatentransformation erreichen wir, daß b für $u = v = 0$ verschwindet. Es darf das neue b nicht durch u teilbar sein, da sonst b_2 und also $\mathfrak{A}_4'$ durch u teilbar würde. Es enthält also b von u freie Glieder und wir können annehmen, daß in b das Glied mit v vorkommt. Sonst würden wir von der Stelle $S\,(u = v = 0)$ zu einer benachbarten $u = 0$, $v = v_0$ übergehen. Wir führen statt v eine neue Veränderliche v' ein durch die Gleichung $b\,(u, v) = v'$ und schreiben dann wieder v statt v'. Wir haben also im Fall a)

$$3)\qquad \mathfrak{A}_1 = 1, \qquad \mathfrak{A}_2 = u^\alpha, \qquad \mathfrak{A}_3 = u^\beta v, \qquad \mathfrak{A}_4 = u^\beta h, \qquad (\beta > \alpha).$$

Aus den Formeln in D erhalten wir

$$4)\quad \begin{cases} \mathfrak{R} = u^{\alpha+\beta-1}, \qquad \mathfrak{A}_1' = \{(\beta-\alpha)\,(v h_2 - h) - h_1\,u\}\,u^\beta, \\ \mathfrak{A}_2' = \{\beta\,(h - v h_2) + h_1\,u\}\,u^{\beta-\alpha}, \qquad \mathfrak{A}_3' = \alpha h_2, \qquad \mathfrak{A}_4' = -\alpha. \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} L = \alpha\{\beta\,(\beta-\alpha)\,(v h_2 - h) - (2\beta - \alpha + 1)\,h_1\,u - h_{11}\,u^2\}\,u^{\beta-2}, \\ M = -\alpha h_{12}\,u^\beta, \qquad N = -\alpha h_{22}\,u^\beta. \end{cases}$$

$$6)\qquad \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}' = M^2 - L\,N = \alpha^2\beta\,(\beta-\alpha)\,(v h_2 - h)\,h_{22}\,u^{2\beta-2} + \cdots$$

$$7)\quad \begin{cases} X = p_{12}\,\alpha u^{\alpha-1} + \cdots, \qquad Y = (p_{13} + p_{14}\,h_2)\,u^\beta + \cdots, \\ -\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z} = L\,Y^2 - 2\,M\,Y\,X + N\,X^2 = \alpha^3\,p_{12}^2\,h_{22}\,u^{2\alpha+\beta-2} + \cdots \end{cases}$$

Es darf h_2 für $u = 0$ nicht gleich einer Konstanten k werden, da sonst $\mathfrak{A}_3' + k\,\mathfrak{A}_4'$ durch u teilbar würde. Es sind also weder h_2 noch $h_2 v - h$ noch h_{22} durch u teilbar. Daher ergibt sich

$$8)\qquad \varrho = \alpha + \beta - 1, \qquad \varrho' = \beta - \alpha - 1, \qquad \sigma_1 = \beta - 2, \qquad \varphi = \alpha - 1.$$

b) Es sei b_2 durch u teilbar. Es werde also b für $u = 0$ zu einer Konstanten. Wir setzen in diesem Falle

$$\mathfrak{A}_3 = g(u) + u^\delta a_3(u, v),$$

wo $g(u)$ durch u^β teilbar sein soll und nur von u abhängig, und zwar soll $g(u)$ eine ganze rationale Funktion von u höchstens vom Grade $\delta - 1$ sein. Ferner soll a_3 für $u = 0$ nicht konstant werden. Wir können annehmen, daß $a_3(0, 0) \neq 0$. Sonst würden wir wieder zu einer benachbarten Stelle $u = 0$, $v = v_0$ übergehen. Ebenso können wir annehmen, daß in a_3 das Glied mit v vorkommt. Da es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, so können wir setzen $a_3 = 1 + v'$, wo v' eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist, die für $u = v = 0$ verschwindet und die erste Potenz von v enthält. Wir können also v' als neue Veränderliche statt v einführen und, wenn wir wieder v für v' schreiben, so haben wir im Falle b)

$$(9) \quad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = u^\alpha, \quad \mathfrak{A}_3 = g + u^\delta(1 + v), \quad \mathfrak{A}_4 = h + u^\varepsilon k(u, v).$$

Hier sind g und h ganze rationale Funktionen von u allein höchstens vom Grade $\delta - 1$ und $\varepsilon - 1$. Es ist g genau durch u^β und h durch u^γ teilbar. Ferner ist $k(0, v)$ nicht konstant, also $\frac{\partial k}{\partial v}$ nicht durch u teilbar. Es ist g sicher nicht identisch Null. Dagegen kann h identisch verschwinden. Es ist

$$(10) \qquad \beta > \alpha, \quad \delta > \beta, \quad \varepsilon \geqq \gamma \geqq \beta.$$

Nach D ergibt sich, wenn wir die Ableitungen von g und h durch Akzente und die von k nach u und v durch die Indizes 1 und 2 ausdrücken,

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_1 = -u^\alpha \mathfrak{B}_2 - \{g + u^\delta(1 + v)\}\mathfrak{B}_3 - \{h + u^\varepsilon k\}\mathfrak{B}_4, \\ \mathfrak{B}_2 = h' u^\delta - g' k_2 u^\varepsilon + \{\varepsilon k - \delta k_2(1 + v)\} u^{\delta+\varepsilon-1} + k_1 u^{\delta+\varepsilon} \\ \mathfrak{B}_3 = \alpha k_2 u^{\varepsilon+\alpha-1}, \quad \mathfrak{B}_4 = -\alpha u^{\alpha+\delta-1}. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_4'$ wieder nicht durch u teilbar sein dürfen, so folgt wegen (10) und da g und h durch u^β und u^γ teilbar sind, während k_2 nicht den Faktor u hat,

$$(12) \qquad \varepsilon = \delta, \quad \mathfrak{R} = u^{\alpha+\delta-1}.$$

Es wird also wegen (10) $\varepsilon > \beta$ und dann durch Koordinatentransformation

$$(13) \qquad \gamma > \beta.$$

Setzen wir

$$(14) \qquad g = \{a_0 + a_1 u + \cdots\} u^\beta, \quad k_2 = c_0 + c_1 u + \cdots,$$

so wird ferner

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = (\beta-\alpha)\, a_0 c_0 u^\beta + \cdots, & \mathfrak{A}_2' = -\beta\, a_0 c_0 u^{\beta-\alpha} + \cdots, \\ \mathfrak{A}_3' = \alpha\, k_2 = \alpha\, c_0 + \cdots, & \mathfrak{A}_4' = -\alpha. \end{cases}$$

Es darf also c_0 nicht konstant sein, da sonst $\mathfrak{A}_3' + c_0 \mathfrak{A}_4'$ durch u teilbar würde, was bei konstantem c_0 nicht sein darf, wie wir oben gesehen haben. Daher ist c_0' nicht Null, d. h. es ist k_{22} nicht durch u teilbar. Wir finden weiter

$$(16)\quad \begin{cases} L = \alpha\beta(\beta-\alpha) a_0 c_0 u^{\beta-2} + \cdots, \quad M = -\alpha k_{12} k^\delta, \quad N = -\alpha k_{22} u^\delta \\ \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN = \alpha^2 \beta(\beta-\alpha) a_0 c_0 c_0' u^{\beta+\delta-2} + \cdots, \end{cases}$$

$$(17)\qquad X = \alpha p_{12} u^{\alpha-1} + \cdots, \qquad Y = (p_{13} + p_{14} c_0) u^\delta + \cdots.$$

Es wird also $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}$ genau durch die $(2\alpha+\delta-2)$-te Potenz von u teibar. Hieraus und aus (12), (16) folgt

$$(18)\quad \varrho = \alpha + \delta - 1, \qquad \varrho' = \beta - \alpha - 1, \qquad \sigma_1 = \beta - 2, \qquad \varphi = \alpha - 1.$$

Vergleichen wir dies mit (8), so sehen wir, daß nur ϱ einen andern Wert hat und daß der Fall a) in dem Fall b) für $\delta = \beta$ mit enthalten ist.

Um für die Zahl δ eine einfache geometrische Bedeutung zu erhalten, betrachten wir einen ebenen Schnitt $\mathfrak{A}$ durch eine reguläre Stelle S von $\mathfrak{P}$ ohne besondere Lage. Der Divisor $\mathfrak{z}_{\mathfrak{d}_1}$ der Rückkehrpunkte von $\mathfrak{A}$ wird gegeben durch (9) in E I, 3, S. 204, und zwar ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\mathfrak{P} = 1$ zu setzen, so daß

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{d}_1} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}} = \left\{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{V}}\right\}_{\mathfrak{A}=0}$$

Für die Umgebung von S ist $\mathfrak{R} = u^{\alpha+\delta-1}$, $\mathfrak{V} = u^\alpha$. Ist also $\mathfrak{p}$ der Primteiler, der zu der Stelle S von $\mathfrak{A}$ gehört, so ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{d}_1}$ durch $\mathfrak{p}^{\delta-1}$ teilbar. D. h.: Ein durch eine reguläre Stelle S von $\mathfrak{P}$ gehender ebener Schnitt ohne besondere Lage hat S als $(\delta-1)$-fachen stationären Punkt.

2. $\mathfrak{P}$ ist Ebenenkurve und Gerade.

Es ist also $\overline{\mathfrak{P}}$ eine Ebene, die F längs der Geraden $\mathfrak{P}$ berührt. Dieser Fall ist zu dem vorigen dual, so daß wir das Ergebnis aus dem der vorigen Nummer erhalten. Es ist in der Tabelle 1 in Nr. 6 angegeben.

3. $\mathfrak{P}$ ist Punktkurve, aber keine Gerade.

Der Punkt, in den $\mathfrak{P}$ kondensiert ist, heiße wieder H und sei die Ecke 1 des Koordinatentetraeders. Es ist $\overline{\mathfrak{P}}$ ein wirklicher Kegel, dessen Spitze H ist. Es werden $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar, aber nicht $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_4'$. Es gelten die Überlegungen von Nr. 1. Da aber nur

$\mathfrak{A}_1'$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar sein darf, so muß $\alpha = \beta = \gamma$ sein. Wir haben also in der Umgebung einer regulären Stelle S von $\mathfrak{P}$

$$(19) \qquad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = u^\alpha, \quad \mathfrak{A}_3 = u^\alpha v, \quad \mathfrak{A}_4 = u^\alpha h.$$

Hieraus folgt

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = u^{2\alpha-1}, & \mathfrak{A}_1' = -h_1 u^{\alpha+1}, & \mathfrak{A}_2' = \alpha(h - v h_2) + u h_1, \\ & \mathfrak{A}_3' = \alpha h_2, & \mathfrak{A}_4' = -\alpha. \end{cases}$$

$$(21) \quad L = -\alpha\{(\alpha+1)h_1 + h_{11}u\}u^{\alpha-1}, \quad M = -\alpha h_{12} u^\alpha, \quad N = -\alpha h_{22} u^\alpha,$$

$$(22) \quad X = \{\alpha p_{12} + \alpha v p_{13} + h p_{14}\}u^{\alpha-1} + \cdots, \quad Y = \{p_{13} + p_{14} h_2\}u^\alpha + \cdots.$$

Da nur $\mathfrak{A}_1'$ durch u teilbar sein darf, aber nicht $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_4'$ und überhaupt keine lineare homogene Funktion mit konstanten Koeffizienten der $\mathfrak{A}_\alpha'$ außer $\mathfrak{A}_1'$, so folgt aus (20), daß weder h_2 noch $h - v h_2$ durch u teilbar sein darf und auch nicht h_{22}. Denn sonst wäre $h_2(0, v)$ gleich einer Konstanten k und $\mathfrak{A}_3' + k\mathfrak{A}_4'$ wäre durch u teilbar.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

a) *h_1 ist nicht durch u teilbar.*

Dann ist $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN$ genau durch $u^{2\alpha-1}$ teilbar und wegen (21), (22) und I, (5) $\mathfrak{R}\mathfrak{J}$ durch $u^{3\alpha-2}$. Also wird

$$(23) \qquad \varrho = 2\alpha - 1, \quad \varrho' = 0, \quad \sigma_1 = \alpha - 1, \quad \varphi = \alpha - 1.$$

b) *h_1 ist durch u teilbar.* Es sei

$$(24) \qquad h = b_0 + b_1 u^\delta + b_2 u^{\delta+1} + \cdots, \quad \delta > 1,$$

so daß

$$(25) \quad \begin{cases} h_1 = \delta b_1 u^{\delta-1} + \cdots, & h_{11} = \delta(\delta-1) b_1 u^{\delta-2} + \cdots, \\ & h_{12} = \delta \frac{d b_1}{d v} u^{\delta-1} + \cdots. \end{cases}$$

Es ist M^2 mindestens teilbar durch $u^{2(\alpha+\delta-1)}$ und LN genau durch $u^{2\alpha+\delta-2}$, so daß auch $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN$ genau durch die $(2\alpha+\delta-2)$-te Potenz von u teilbar ist. $\mathfrak{R}\mathfrak{J}$ wird wieder genau durch $u^{3\alpha-2}$ teilbar. Daher wird

$$(26) \qquad \varrho = 2\alpha - 1, \quad \varrho' = \delta - 1, \quad \sigma_1 = \alpha, \quad \varphi = \alpha - 1.$$

4. $\mathfrak{P}$ ist Ebenenkurve, aber keine Gerade.

Dieser Fall ist zum vorigen dual.

5. $\mathfrak{P}$ sei Gerade, aber weder Punkt- noch Ebenenkurve.

In der Umgebung einer regulären Stelle von $\mathfrak{P}$ haben wir

$$(27) \qquad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = u^\alpha, \quad \mathfrak{A}_4 = u^\alpha h,$$

wo u die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ ist. Es ist also $\mathfrak{P}$ die Gerade $y_3 = y_4 = 0$. Es darf h_2 nicht durch u teilbar sein. Denn dann wäre $h(0, v)$ eine Konstante k und $\mathfrak{A}_4 - k\mathfrak{A}_3$ würde mindestens durch $u^{\alpha+1}$ teilbar, so daß die Ebene $y_4 - k y_3 = 0$ die Gerade $\mathfrak{P}$ mehr als α-mal mit F gemeinsam haben und daher F längs $\mathfrak{P}$ berühren würde. Es wäre also $\mathfrak{P}$ doch Ebenenkurve. Wir finden aus (27)

$$(28)\quad \begin{cases} \mathfrak{R} = u^{\alpha-1}, & \mathfrak{A}_1' = (\alpha v h_2 + h_1 u) u^{\alpha}, & \mathfrak{A}_2' = -\alpha h_2 u^{\alpha}, \\ & \mathfrak{A}_3' = -\alpha h - u h_1, & \mathfrak{A}_4' = \alpha. \end{cases}$$

$$(29)\quad L = \alpha\{(\alpha+1)h_1 + h_{11}u\}u^{\alpha-1}, \quad M = \alpha\{\alpha h_2 + h_{12}u\}u^{\alpha-1}, \quad N = \alpha h_{22} u^{\alpha}.$$

$$(30)\quad X = \alpha\{p_{13} + p_{14}h + v p_{23} + v h p_{24}\}u^{\alpha-1} + \cdots, \quad Y = p_{12} + \cdots.$$

Ist h wieder durch (24) gegeben, wo wir auch $\delta = 1$ zulassen, so finden wir

$$(31)\quad \begin{cases} \varrho = \alpha - 1 = \varrho', \quad \sigma_1 = \alpha - 1, \\ \varphi = \delta - 1, \quad \text{wenn} \quad \delta \leqq \alpha, \\ \varphi = \alpha - 1, \quad \text{wenn} \quad \delta \geqq \alpha. \end{cases}$$

6. Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse.

In der folgenden Tabelle 1 haben die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$ folgende Bedeutung. ε_1 gibt an, wie oft eine Ebene, die die Kurve $\mathfrak{P}$ enthält, diese mindestens mit F gemeinsam hat, und, wenn es eine Ebene gibt, die $\mathfrak{P}$ öfter enthält, so gibt ε_2 an, wie oft. Die Zahl ε_1' gibt an, wie oft ein Berührungskegel, der die Fläche $\mathfrak{P}$ enthält, diesen mit F mindestens gemeinsam hat, und, wenn ein Berührungskegel $\mathfrak{P}$ mehr als ε_1'-mal mit F gemeinsam hat, so gibt ε_2' an, wievielmal.

Tabelle 1.

Fall	ε_1	ε_2	ε_1'	ε_2'	ϱ	ϱ'	σ_1	φ
I	α	$\alpha+\alpha'$	α'	$\alpha+\alpha'$	$\alpha+\delta-1$	$\alpha'-1$	$\alpha+\alpha'-2$	$\alpha-1$
II	α	$\alpha+\alpha'$	α'	$\alpha+\alpha'$	$\alpha-1$	$\alpha'+\delta'-1$	$\alpha+\alpha'-2$	$\alpha'-1$
III a $\varrho'=0$	α		$\alpha+1$		$2\alpha-1$	0	$\alpha-1$	$\alpha-1$
III b $\varrho'>0$	α		$\alpha+\delta$		$2\alpha-1$	$\delta-1$	α	$\alpha-1$
IV a $\varrho=0$	$\alpha+1$		α		0	$2\alpha-1$	$\alpha-1$	$\alpha-1$
IV b $\varrho>0$	$\alpha+\delta$		α		$\delta-1$	$2\alpha-1$	α	$\alpha-1$
V	α		α		$\alpha-1$	$\alpha-1$	$\alpha-1$	$\leqq\alpha-1$

Die einzelnen Fälle sind folgende:

I. $\mathfrak{P}$ ist Punktkurve, $\overline{\mathfrak{P}}$ Gerade.

II. $\mathfrak{P}$ ist Gerade und Ebenenkurve.

III. $\mathfrak{P}$ ist Punktkurve, aber keine Gerade.

IV. $\mathfrak{P}$ ist Ebenenkurve, aber keine Gerade.

V. $\mathfrak{P}$ ist Gerade, aber weder Punkt- noch Ebenenkurve.

Der Fall, wo $\mathfrak{P}$ gleichzeitig Punkt- und Ebenenkurve ist, fehlt.

Im Falle I gibt die Zahl $\delta - 1$ an, von welcher Ordnung eine reguläre Stelle von $\mathfrak{P}$ stationär ist für einen durch S gehenden ebenen Schnitt ohne besondere Lage und im Falle II gibt die Zahl $\delta' - 1$ an, von welcher Ordnung die Ebene $\overline{\mathfrak{P}}$ stationär ist für einen Berührungskegel, dessen Spitze auf $\mathfrak{P}$ liegt.

7. $\mathfrak{P}$ sei weder Punkt- noch Ebenenkurve und keine Gerade.

a) Es sei $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthalten.

Dann ist nach I, Nr. 3

$$\varrho = \varrho' = \sigma_1 = \varphi = 0. \tag{32}$$

In den beiden folgenden Fällen b) und c) bestimmen wir noch zwei Zahlen τ, τ', die folgendermaßen definiert sind. In diesen Fällen fallen in den Stellen von $\mathfrak{P}$ die Inflexionstangenten zusammen. Es sei t die Inflexionstangente in einer regulären Stelle S von $\mathfrak{P}$. Es ist dann τ die Zahl der Schnittpunkte von t mit F in S und τ' gibt an, wie oft die Berührungsebene von F in S unter den durch t gehenden Berührungsebenen von F zählt. Diese Zahlen τ, τ' können in folgender Weise bestimmt werden. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei durch t gehende ebene Schnitte von F und $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ zwei Berührungskurven von Kegeln, deren Spitzen auf t liegen, so ist τ die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und τ' die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ in S.

b) Es sei $\varrho > \varrho'$.

Es sei S eine reguläre Stelle von $\mathfrak{P}$ und es sei S die Ecke 1 des Koordinatentetraeders, so daß wir $\mathfrak{A}_1 = 1$ annehmen können. Ferner sei wieder u die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S. Die Ebene $y_2 = 0$ sei eine Ebene durch S ohne besondere Lage. Es kommt dann in $\mathfrak{A}_2(u, v)$ das Glied mit v vor. Denn wenn für jeden durch irgendeine reguläre Stelle S von $\mathfrak{P}$ gehenden ebenen Schnitt $\mathfrak{A}$ in der zugeordneten Funktion $\mathfrak{A}(u, v)$ die erste Potenz von v fehlte, so würden längs $\mathfrak{P}$, d. i. für $u = 0$, die Determinanten $\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i d\mathfrak{A}_k$ verschwinden. Es würden mit anderen Worten die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_k$ längs $\mathfrak{P}$ konstant und $\mathfrak{P}$ wäre Punktkurve. Wir können daher statt v durch die Gleichung $\mathfrak{A}_2(u, v) = v'$

eine neue Hilfsgröße v' einführen, für die wir wieder v schreiben. Mit anderen Worten, wir können $\mathfrak{A}_2 = v$ setzen. Wir haben also in der Umgebung von S

$$(33) \qquad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{A}_4 = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots,$$

wo die a_α, b_α gewöhnliche Potenzreihen von v sind. Da $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten Potenz enthalten ist, so müssen die Determinanten $\mathfrak{Z}_\alpha$ (D, S. 184 (5)) durch u^ϱ teilbar werden. Daraus folgt, daß

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_\varrho = 0, \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_\varrho = 0,$$

während $a_{\varrho+1}$ und $b_{\varrho+1}$ nicht beide identisch Null sein dürfen. Wir haben also

$$(34) \quad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = g_0 + g u^{\varrho+1}, \quad \mathfrak{A}_4 = h_0 + h u^{\varrho+1},$$

wo g_0, h_0 gewöhnliche Potenzreihen von v, und g, h von u, v sind. Es sind g und h nicht beide durch u teilbar. Es sei etwa g nicht durch u teilbar. Dann können wir g als Einheit für die Stelle S annehmen. Sonst würden wir zu einer benachbarten Stelle $u = 0$, $v = v_0$ übergehen. Wir können also durch $g u^{\varrho+1} = u'^{\varrho+1}$ eine neue Hilfsgröße u' einführen, für die wir wieder u schreiben und erhalten statt (34)

$$(35) \quad \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = g_0 + u^{\varrho+1}, \quad \mathfrak{A}_4 = h_0 + h u^{\varrho+1}.$$

Dadurch, daß wir konstante Vielfache von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ subtrahieren, also durch Koordinatentransformation erreichen wir, daß in g_0 und h_0 die konstanten Glieder und die Glieder mit der ersten Potenz von v fortfallen. Es kann g_0 oder h_0 identisch Null werden, aber nicht g_0 und h_0, da sonst $\mathfrak{P}$ eine Gerade wäre. Daher können wir annehmen, daß h_0 nicht identisch Null ist. Indem wir von $\mathfrak{A}_4$ ein konstantes Vielfaches von $\mathfrak{A}_3$ subtrahieren, erreichen wir, daß in h das konstante Glied fehlt. Wir haben also

$$(36) \quad g_0 = a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots, \quad h_0 = b_2 v^2 + b_3 v^3 + \cdots, \quad h = k_1 + k_2 u + \cdots,$$

wo $k_1(0) = 0$.

Wir müssen für das folgende noch sehen, ob für alle regulären Stellen von $\mathfrak{P}$ der Koeffizient b_2 Null sein kann. Wir setzen $v - v_0 = v'$ und erhalten für die Umgebung der Stelle $u = 0$, $v = v_0$

$$(37) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = v_0 + v', \\ \mathfrak{A}_3 = g_0(v_0) + g_0'(v_0) v' + \frac{1}{2} g_0''(v_0) v'^2 + \cdots + u^{\varrho+1}, \\ \mathfrak{A}_4 = h_0(v_0) + h_0'(v_0) v' + \frac{1}{2} h_0''(v_0) v'^2 + \cdots \\ \qquad + \{k_1(v_0) \; k_1'(v_0) v' + \cdots\} u^{\varrho+1} + (u^{\varrho+2}). \end{cases}$$

Wenn wir in $\mathfrak{A}_4$ das absolute Glied des Faktors von $u^{\varrho+1}$ zum Verschwinden bringen wollen, so haben wir das $h_1(v_0)$-fache von $\mathfrak{A}_3$ zu subtrahieren. Dann wird der Faktor von v'^3 zu

$$\frac{1}{2}\{h_0''(v_0) - g_0''(v_0)\,k_1(v_0)\}.$$

Dieser verschwindet an jeder Stelle von $\mathfrak{P}$ dann und nur dann, wenn identisch

$$h_0''(v) - g_0''(v)\,k_1(v) = 0. \tag{38}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann g_0 nicht identisch Null sein. Denn dann würde $h_0'' = 0$ folgen. Da wir aber annehmen können, daß h_0 durch v^2 teilbar ist, so wäre auch h_0 identisch Null und $\mathfrak{P}$ eine Gerade. Ebensowenig kann k_1 identisch Null sein, wenn die Bedingung (38) erfüllt ist. Denn dann folgt wieder $h_0 \equiv 0$ und $\mathfrak{A}_4$ würde $\mathfrak{P}$ in höherer als $(\varrho+1)$-ter Potenz enthalten. Die Ebene $y_4 = 0$ würde F längs $\mathfrak{P}$ berühren und $\mathfrak{P}$ wäre Ebenenkurve. Der Faktor von v'^3 in h_0 wird

$$\frac{1}{6}\{h_0'''(v_0) - g_0'''(v_0)\,k_1(v_0)\}.$$

Ist die Bedingung (38) erfüllt, so kann dieser Faktor nicht auch für alle Stellen von $\mathfrak{P}$ identisch verschwinden. Denn dann müßte neben (38) noch die Gleichung

$$h_0'''(v) - g_0'''(v)\,k_1(v) = 0.$$

bestehen, so daß

$$\frac{h_0'''}{h_0''} = \frac{g_0'''}{g_0''}$$

oder

$$h_0'' = c\,g_0''$$

sein würde, wo c eine Konstante ist. Da wir annehmen können, daß g_0 und h_0 durch v^2 teilbar sind, so würde folgen

$$h_0 = c\,g_0.$$

Aus (38) folgt dann, da g_0 und h_0 nicht beide Null sein können,

$$k_1 = c.$$

Es enthält daher die Ebene $y_4 - c\,y_3 = 0$ die Kurve $\mathfrak{P}$ mehr als $\varrho+1$-mal, da $\mathfrak{A}_4 - c\,\mathfrak{A}_3$ mindestens durch $u^{\varrho+2}$ teilbar wird. Diese Ebene würde also F längs $\mathfrak{P}$ berühren und $\mathfrak{P}$ wäre gegen die Annahme Ebenenkurve.

Wir haben also folgende Fälle:

Fall 1. $h_0'' - g_0''\,k_1 \not\equiv 0$.

Dann können wir annehmen, daß g_0 mindestens durch v^2 teilbar ist und h_0 genau durch v^2. Es ist k_1 entweder genau durch v teilbar oder identisch Null.

Fall 2. $h_0'' - g_0'' k_1 \equiv 0$.

Dann können wir annehmen, daß g_0 genau durch v^2 und h_0 genau durch v^3 teilbar ist. Es ist k_1 genau durch v teilbar. Wir setzen

39) $$h = k_1 + k_{\delta+1} u^\delta + k_{\delta+2} u^{\delta+1} + \ldots, \quad \delta > 0$$

und können $k_{\delta+1}(0)$ als von Null verschieden voraussetzen.

Aus (35) ergibt sich

40) $$\begin{cases} \mathfrak{R} = u^\varrho, \quad \mathfrak{A}_1' = -v\mathfrak{A}_2' - (g_0 + u^{\varrho+1})\mathfrak{A}_3' - (h_0 + h u^{\varrho+1})\mathfrak{A}_4', \\ \mathfrak{A}_2' = (\varrho+1)(g_0' h - h_0') + g_0' h_1 u - (\varrho+1) h_2 u^{\varrho+1}, \\ \mathfrak{A}_3' = -\{(\varrho+1)h + h_1 u\}, \quad \mathfrak{A}_4' = \varrho + 1, \\ \mathfrak{A}_1' = -v\mathfrak{A}_2' + (\varrho+1)(g_0 h - h_0) + g_0 h_1 u + h_1 u^{\varrho+2}. \end{cases}$$

41) $$\begin{cases} L = (\varrho+1)\{(\varrho+2)h_1 + h_{11} u\} u^\varrho, \quad M = (\varrho+1)\{(\varrho+1)h_2 + h_{12} u\} u^\varrho, \\ N = (\varrho+1)\{h_0'' - g_0'' h\} - g_0'' h_1 u + (\varrho+1) h_{22} u^{\varrho+1}. \end{cases}$$

Fall 1. $h_0'' - g_0'' k_1 \not\equiv 0$.

N ist nicht durch u teilbar, so daß $\sigma_1 = 0$. Da $\varrho' < \varrho$ angenommen ist und M^2 mindestens durch $u^{2\varrho}$ teilbar ist, so ist wegen $M^2 - LN = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ LN genau durch $u^{\varrho+\varrho'}$ teilbar, also auch L. Wegen (39) und (41) wird L genau durch $u^{\varrho+\delta-1}$ teilbar. Es ist also

42) $$\varrho' = \delta - 1.$$

Da $\varrho' < \varrho$, so ist $\delta \leqq \varrho$. Der Wert von φ ergibt sich nach I (84) zu

43) $$\varphi = \varrho'.$$

Nach I, Nr. 8 ist die Inflexionstangente t die Tangente von $\mathfrak{P}$ in S. Nun ist für $u = 0$ nach (35)

44) $$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{a}_3 = g_0, \quad \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{a}_4 = h_0,$$

und zwar beginnen g_0 und h_0 mit v^2, so daß t die Gerade

$$y_3 = y_4 = 0 \quad \text{oder} \quad y_1' = y_2' = 0$$

ist. Daher ist τ die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ in S und τ' die der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ in S.

Wenn g_0 identisch Null, so ergibt die Gleichung $\mathfrak{A}_3 = 0$ die Lösung $v = 0$, und zwar $(\varrho+1)$-mal. Da $\mathfrak{A}_4$ für $u = 0$ durch v^2 teilbar wird, so ist $\tau = 2(\varrho+1)$. Ist g_0 nicht Null, so folgt aus $\mathfrak{A}_3 = 0$ für v eine Potenzreihe, deren Anfangsglied die $\frac{1}{2}(\varrho+1)$-te Potenz von u enthält. Setzen wir diese Lösung in $\mathfrak{A}_4$ ein, so wird $\mathfrak{A}_4$ genau teilbar durch $u^{\varrho+1}$. Es ist also in beiden Fällen

45) $$\tau = 2\varrho + 2.$$

In $\mathfrak{A}_1'$ kommt die erste Potenz von v nicht vor, wohl aber die zweite, nämlich das Anfangsglied von $vh_0' - h_0$. Die niedrigste Potenz von u ohne eine Potenz von v als Faktor ist die $(\varrho+\delta+1)$-te. Sie ist das Anfangsglied von $h_1 u^{\varrho+2}$. Daher folgt aus $\mathfrak{A}_1' = 0$

$$v = eu^{\frac{1}{2}(\varrho+\delta-1)} + \cdots, \tag{46}$$

wo $e \neq 0$. In $\mathfrak{A}_2'$ kommt die erste Potenz von v vor, nämlich im Anfangsgliede von h_0'. Alle anderen Glieder sind durch v^2 oder $u^{\varrho+1}$ teilbar. Daher und weil $\delta \leqq \varrho$, wird $\mathfrak{A}_2'$, wenn wir für v die Reihe (46) einsetzen, genau durch die $\frac{1}{2}(\varrho+\delta+1)$-te Potenz von u teilbar. Es ist also

$$\tau' = \varrho + \delta + 1 = \varrho + \varrho' + 2. \tag{47}$$

Fall 2. $h_0'' - g_0'' k_1 \equiv 0$.

Es ist zu beachten, daß, wie wir oben gesehen haben, in diesem Falle g_0'' nicht identisch Null sein kann. Aus (41) folgt jetzt wegen (39), daß N genau durch u^δ, L durch $u^{\varrho+\delta+1}$ und M mindestens durch u^ϱ teilbar ist. Wie in Fall 1 folgt, daß LN genau durch $u^{\varrho+\varrho'}$ teilbar sein muß, da $\varrho' < \varrho$ angenommen ist. Es wird also

$$\sigma_1 = \delta, \quad \varrho' = 2\delta - 1 = 2\sigma_1 - 1, \quad 2\delta \leqq \varrho. \tag{48}$$

Nach I (84) ist

$$\varphi = \varrho' - \sigma_1 = \delta - 1 = \sigma_1 - 1. \tag{49}$$

Da $\sigma_1 > 0$, so ist $\mathfrak{P}$ Inflexionskurve, und die Inflexionstangente t, die F in einer regulären Stelle von $\mathfrak{P}$ hat, ist gleichzeitig Tangente von $\mathfrak{P}$ und Gerade von $\overline{\mathfrak{P}}$. Für $\mathfrak{P} = 0$, d. i. $u = 0$, wird nach (35)

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_1 = 1, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_2 = v, \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{a}_3 = g_0(v), \quad \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{a}_4 = h_0(v).$$

Da g_0 durch v^3 und h_0 durch v^3 teilbar ist, so ist t die Gerade $y_3 = y_4 = 0$ oder $y_1' = y_2' = 0$. Es ist wieder τ die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ in S und τ' die der Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ in S.

Wir setzen

$$g_0 = av^2 + \cdots, \quad h_0 = bv^3 + \cdots, \quad k_1 = cv + \cdots, \quad k_{\delta+1} = d + d_1 v + \cdots \tag{50}$$

Wie wir gesehen haben, ist für eine Stelle S ohne besondere Lage

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0. \tag{51}$$

Da $h_0'' - g_0'' k_1 \equiv 0$, so folgt

$$ac = 3b. \tag{52}$$

Es wird

$$\mathfrak{A}_3 = av^2 + \cdots + u^{\varrho+1}, \quad \mathfrak{A}_4 = (bv^2 + cu^{\varrho+1})v + \cdots.$$

Aus $\mathfrak{A}_3 = 0$ ergibt sich

$$v = \sqrt{\frac{-1}{a}}\, u^{\frac{\varrho+1}{2}} + \cdots.$$

Setzen wir dies in $\mathfrak{A}_4$ ein, so wird

$$\mathfrak{A}_4 = \left(-\frac{b}{a} + c\right) e u^{\frac{3}{2}(\varrho+1)} + \cdots.$$

Der Koeffizient des Anfangsgliedes ist wegen (52)

$$\frac{e}{a}(ac - b) = \frac{2eb}{a} + 0.$$

Daher ist

(53) $$\tau = 3\varrho + 3.$$

Ferner folgt wegen (50) und (52) aus (40)

$$\mathfrak{A}_2' = 3(\varrho+1)bv^2 + 2(\varrho+\delta+1)advu^\delta - (\varrho+1)cu^{\varrho+1} + \cdots,$$

$$\mathfrak{A}_1' = -v\mathfrak{A}_2' + \{2(\varrho+1)bv + (\varrho+\delta+1)adu^\delta\}v^2 + \cdots.$$

Aus $\mathfrak{A}_2' = 0$ ergeben sich zwei Lösungen v_1 und v_2 für u, die gewöhnliche Potenzreihen von u sind,

$$v = v_1 \equiv e_1 u^\delta + \cdots, \qquad v = v_2 \equiv e_2 u^{\varrho-\delta+1} + \cdots,$$

wo

$$e_1 = -\frac{2(\varrho+\delta+1)ad}{3(\varrho+1)b}, \qquad e_2 = \frac{c}{2ad}.$$

Für $v = v_1$ wird

$$\mathfrak{A}_1' = -\frac{ad}{3} e_1^2 (\varrho+\delta+1) u^{3\delta} + \cdots$$

und für $v = v_2$ ist

$$\mathfrak{A}_1' = (\varrho+\delta+1) e_2^2 ad u^{2\varrho-\delta+2} + \cdots.$$

Es ist also

(54) $$\tau' = 3\delta + 2\varrho - \delta + 2 = 2(\varrho + \delta + 1).$$

c) *Es sei* $\varrho < \varrho'$.

Dieser Fall ist dual zum Falle b), so daß wir das Ergebnis aus dem vorigen erhalten können.

Im Falle $\varrho = \varrho' > 0$ findet man keine übersichtlichen Ergebnisse. Wir betrachten ihn hier nicht.

8. Zusammenstellung.

Wir stellen die Ergebnisse der vorigen Nummer in folgender Tabelle 2 zusammen.

Tabelle 2.

Fall	ϱ	ϱ'	φ	τ	τ'
$\varrho > \varrho',\ \sigma_1 = 0$	ϱ	ϱ'	ϱ'	$2\varrho + 2$	$\varrho + \varrho' + 2$
$\varrho > \varrho',\ \sigma_1 > 0$	ϱ	$2\sigma_1 - 1$	$\sigma_1 - 1$	$3\varrho + 3$	$2(\varrho + \sigma_1 + 1)$
$\varrho < \varrho',\ \sigma_1 = 0$	ϱ	ϱ'	ϱ	$\varrho + \varrho' + 2$	$2\varrho' + 2$
$\varrho < \varrho',\ \sigma_1 > 0$	$2\sigma_1 - 1$	ϱ'	$\sigma_1 - 1$	$2(\varrho' + \sigma_1 + 1)$	$3\varrho' + 3$

Die Tabelle gilt für Kurven $\mathfrak{P}$, die weder kondensiert noch Geraden sind.

9. Eine Gleichung von Halphen.

Aus den Äquivalenzen (I) und (II) in D, S. 221 folgt

$$\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} \sim \frac{\mathfrak{A}'^4}{\mathfrak{A}^4}$$

und hieraus

$$4(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') - 4(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}') - (\mathfrak{A}, \mathfrak{R})$$

oder, da $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = n$ gleich der Ordnung und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = a$ gleich dem Rang von F

$$(55) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}') - (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = 4(a - n).$$

Ist die Primkurve $\mathfrak{P}$ in den Potenzen ϱ und ϱ' in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ enthalten und ist die Ordnung $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ gleich d, so ist der Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu der linken Seite von (55) gleich $d(\varrho' - \varrho)$, so daß auch

$$(56) \qquad \sum d(\varrho' - \varrho) = 4(a - n).$$

Die Summe ist über die Kurven von F zu erstrecken, die in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ enthalten sind. Wir können aber fortlassen

1. die Punktkurven, da ihre Ordnung Null,

2. die Kurven, für die $\varrho = \varrho'$, also unter anderm nach Tabelle 1 in Nr. 6 alle Geraden, die nicht Ebenenkurven sind.

Halphen formt die Gleichung (56) um, indem er statt ϱ, ϱ' andere Größen einführt. Ist $\mathfrak{P}$ eine Kurve auf F und hat ein durch eine reguläre Stelle S von $\mathfrak{P}$ gehender ebener Schnitt ohne besondere Lage in S einen stationären Punkt von der Ordnung $\mu - 1$ und eine stationäre Tangente von der Ordnung $\nu - 1$, so nennt Halphen μ die Ordnung und ν die Klasse der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Blätter von F. Bei Halphen sind

ie Größen n, a, μ, ν bezeichnet mit m, r, n, ν. Nach den Ergebnissen on E I, Nr. 3 und 5 ist in unsern Bezeichnungen

57) $$\mu = \varrho + 1, \quad \nu = \varphi + 1.$$

Halphen führt in (56) die Zahlen μ und ν statt ϱ und ϱ' ein; dazu och einige Zahlen, wie wir gleich sehen werden.

Wir unterscheiden folgende Fälle, die denen von Halphen entprechen, wenn die Charakterisierung auch etwas anders ist[3]).

1. $\mathfrak{P}$ *ist keine Gerade, keine Ebenenkurve und keine Inflexionskurve* $\sigma_1 = 0$).

a) $\varrho > \varrho'$. Die Ordnung und Klasse der Blätter durch $\mathfrak{P}$ seien μ nd ν.

Aus Tabelle 2 in Nr. 8 ergibt sich

58) $$\varrho' - \varrho = \varrho' + 1 - (\varrho + 1) = -(\mu - \nu).$$

b) $\varrho < \varrho'$. Die Zahlen μ, ν, d seien in diesem Fall bezeichnet mit $_1$, ν_1, d_1.

Aus Tabelle 2 in Nr. 8 finden wir

59) $$\varrho' - \varrho = \tau - 2(\varrho + 1) = \tau - 2\nu_1.$$

ach der Auffassung von Halphen gehen durch $\mathfrak{P}$ $\varrho + 1$ Blätter von F. s ist τ die Zahl der Schnittpunkte der Inflexionstangente t in einem gulären Punkte S von $\mathfrak{P}$ mit F. Die Zahl der Schnittpunkte von t it einem der $\varrho + 1$ Blätter nennt Halphen $\lambda + 2$ und setzt

60) $$\lambda + 2 = \frac{\tau}{\varrho + 1} = \frac{\tau}{\nu_1}.$$

ann wird

61) $$\varrho' - \varrho = \lambda \nu_1.$$

2. $\mathfrak{P}$ *ist weder Punkt- noch Ebenenkurve, aber Inflexionskurve* $_1 > 0$).

a) $\varrho > \varrho'$. Die Zahlen μ, ν, d seien mit μ_2, ν_2, d_2 bezeichnet.

Aus der Tabelle 2 folgt

$$\varrho' - \varrho = 2\sigma_1 - (\varrho + 1) = 2(\varphi + 1) - (\varrho + 1)$$

ler

62) $$\varrho' - \varrho = -(\mu_2 - 2\nu_2).$$

b) $\varrho < \varrho'$. Die Zahlen μ, ν, d seien μ_3, ν_3, d_3.

[3]) Am unter [1]) angegebenen Orte p. 97.

Es ist

$$(63)\qquad \begin{cases} \varrho' - \varrho = \frac{1}{2}\tau - 3\sigma_1 = \frac{1}{2}\tau - 3(\varphi+1), \\ \varrho' - \varrho = \frac{1}{2}\tau - 3\nu_3. \end{cases}$$

Um zur Übereinstimmung mit Halphen zu gelangen, müssen wir die Zahl der Schnittpunkte der Inflexionstangente mit einem der $\varrho+1$ Blätter, die nach Halphens Auffassung durch $\mathfrak{P}$ gehen, setzen gleich

$$(64)\qquad \frac{\tau}{\varrho+1} = \frac{\tau}{2\nu_3} = 2\vartheta + 3.$$

Dann wird

$$(65)\qquad \varrho' - \varrho = 2\vartheta\nu_3.$$

3. $\mathfrak{P}$ *ist Ebenenkurve, aber keine Gerade.*

Die Zahlen μ, ν, d seien μ_4, ν_4, d_4. Nach Tabelle 1 in Nr. 6, Fall IV ist

$$(66)\qquad \begin{cases} \varrho' - \varrho = 2\alpha - (\varrho+1) = 2(\varphi+1) - (\varrho+1), \\ \varrho - \varrho' = 2\nu_4 - \mu_4. \end{cases}$$

4. $\mathfrak{P}$ *ist Gerade und Ebenenkurve.*

Die Zahlen μ, ν, d seien μ_5, ν_5, d_5. Da $\mathfrak{P}$ eine Gerade, so ist $d_5 = 1$. Aus Tabelle 1 in Nr. 6, Fall II folgt

$$(67)\qquad \begin{cases} \varrho' - \varrho = \alpha' + \delta' - (\varphi+1) = (\varphi+1) - (\varrho+1) + \delta' \\ \varrho' - \varrho = \nu_5 - \mu_5 + \delta'. \end{cases}$$

Nach Nr. 6 gibt δ' an, von welcher Ordnung die Ebene, die F längs $\mathfrak{P}$ berührt, stationär ist für einen Berührungskegel, dessen Spitze auf der Geraden $\mathfrak{P}$ liegt. Halphen benutzt statt δ' eine andere Zahl.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir die Halphensche Formel in der Gestalt

$$(68)\qquad \sum\{d_1(\tau - 2\nu_1) - d(\mu - \nu) + \tfrac{d_3}{2}(\tau - 6\nu_3) + d_4(2\nu_4 - \mu_4) + (\nu_5 - \mu_5 + \delta')\} = 4(a - n).$$

Zu dieser Formel kann man leicht die dual entsprechende bilden.

Halle a. d. Saale, Juni 1921.

(Eingegangen am 8. Juli 1921.)

Lineare funktionale Differentialgleichungen.

I. Mitteilung[1]).

Von

Guido Hoheisel in Breslau.

Einleitung.

In Band 70 der Mathematischen Annalen hat Erhard Schmidt lgenden Typus von linearen funktionalen Differentialgleichungen bandelt:

Es sei das Operationssymbol $L(y)$ definiert durch die Gleichung

$$L(y) = c_0 y^{(n)}(x) + c_1 y^{(n-1)}(x - h_1) + \ldots + c_n y(x - h_n),$$

obei die h_ν reelle, die c_ν beliebige Konstante bezeichnen. Man stelle ch die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$L(y) = g(x)$$

i gegebener Funktion $g(x)$ durch Bestimmung der gesuchten Funktion für alle reellen Werte von x zu befriedigen; $g(x)$ ist dabei eine stetige unktion, die in Bachmannscher Schreibweise der Bedingung genügt:

$$g(x) = O(|x|^a),$$

obei a irgendeine endliche Zahl bedeutet. Unter einer eigentlichen ösung der inhomogenen Gleichung (I) ist eine solche Lösung $y(x)$ zu erstehen, die nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen stetig ist und ugleich mit diesen Ableitungen nicht stärker unendlich wird als irgendne, wenn auch noch so hohe Potenz von $|x|$, genauer gesagt der Bedingung genügt

$$y = O(|x|^b), \quad y'(x) = O(|x|^b), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x) = O(|x|^b),$$

obei b nicht vorgegeben ist.

[1]) Diese erste Mitteilung hat — von einer sachlichen Änderung abgesehen — s Dissertation im S. S. 1920 der philosophischen Fakultät in Berlin vorgelegen.

Der Lösbarkeitscharakter der Gleichung (I) hängt wesentlich von den Nullstellen einer ganzen transzendenten Funktion $l(z)$ ab, die durch die Gleichung

$$L(e^{zx}) = e^{zx} l(z)$$

definiert ist. Also

$$l(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} e^{-h_1 z} + \ldots + c_n e^{-h_n z}.$$

Es gelten dann folgende Sätze:

T_I: I. *Hat $l(z) = 0$ keine rein imaginären Wurzeln, so hat die Gleichung* (I) *eine und nur eine eigentliche Lösung. Diese Lösung genügt sogar der Bedingung*

$$y = O(|x|^a), \ldots, y^{(n-1)}(x) = O(|x|^a).$$

Daraus ergibt sich für die homogene Gleichung

$$L(y) = 0$$

die folgende Aussage

T_{II}: II. *Hat $l(z) = 0$ keine rein imaginären Wurzeln, so hat die homogene Gleichung außer der identisch verschwindenden keine eigentliche Lösung.*

Hat dagegen $l(z) = 0$ rein imaginäre Wurzeln, so hat die homogene Gleichung eigentliche Lösungen. Auch die inhomogene Gleichung (I) *besitzt eine Lösung $y(x)$, die aber im allgemeinen nur der Bedingung genügt*

$$y = O(|x|^{a+m}), \quad y'(x) = O(|x|^{a+m}), \ldots, \quad y^{(n-1)}(x) = O(|x|^{a+m}),$$

unter m eine gewisse positive Zahl verstanden.

Diese eigentliche Lösung ist natürlich nicht mehr eindeutig bestimmt[2]).

Die Sätze gelten auch für den allgemeinen Fall

$$L(y) = y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} c_{\nu,\varrho}\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}).$$

In der vorliegenden Arbeit, zu deren Lektüre die Kenntnis der Schmidtschen Arbeit nicht erforderlich ist, treten an die Stelle der Konstanten c_ν Polynome in x. Es handelt sich also um die für alle reellen x zu befriedigende Gleichung

(II) $$\Lambda(y) = g(x),$$

wobei das Operationssymbol $\Lambda(y)$ definiert ist durch die Gleichung

$$\Lambda(y) = P_0(x)\, y^{(n)}(x) + P_1(x)\, y^{(n-1)}(x - h_1) + \ldots + P_n(x)\, y(x - h_n).$$

[2]) E. Schmidt, a. a. O. S. 501, 502.

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Grad von $P_0(x)$ vom Grade keines er übrigen Polynome $P_\nu(x)$ übertroffen wird. Da die Veränderliche x eell ist, werden die Koeffizienten der Polynome im Interesse der Dar- ellung meist reell angenommen. Die Entwickelungen übertragen sich ber ohne weiteres auf den Fall komplexer Koeffizienten. Reelle Doppel- urzeln von $P_0(x)$ bleiben ausgeschlossen. Ist m der Grad von $P_0(x)$, o läßt sich $\Lambda(y)$ in die Gestalt setzen

$$\Lambda(y) = x^m L_m(y) + x^{m-1} L_{m-1}(y) + \ldots + x^0 L_0(y).$$

abei sind die $L_\nu(y)$ Differentialausdrücke vom Schmidtschen Typus.

Von $g(x)$ wird vorausgesetzt, daß es wenigstens zwei, soweit not- endig aber auch mehr stetige Ableitungen besitzt und die Bedingung rfüllt

$$g^{(\nu)}(x) = O(|x|^a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die folgenden Aussagen gelten dann immer unter der Voraussetzung, aß die durch die Gleichung

$$L_m(e^{zx}) = e^{zx} l_m(z)$$

efinierte Funktion $l_m(z)$ keine rein imaginären Wurzeln hat.

Ein wichtiger Unterschied zeigt sich in den Resultaten, je nachdem ie Gleichung

$$P_0(x) = 0$$

eelle Wurzeln hat oder nicht. Offenbar wirkt eine solche reelle Wurzel n allgemeinen störend auf die Lösbarkeit der Gleichung (II). Diese erste litteilung beschränkt sich auf den Fall, daß die Koeffizienten linear oder uadratisch in x sind. Des besseren Verständnisses halber erfolgen die ntwicklungen an zwei Beispielen. Der Fall linearer Koeffizienten wird n den folgenden Beispielen dargelegt:

E_1: $\Lambda(y) = xy'(x) + (ax + b)y(x+1)$,

E_2: $\Lambda(y) = (x + i\eta)y'(x) + (ax + b)y(x+1)$

$(a, b$ und $\eta \neq 0$ reell$)$.

mmer ist jetzt vorausgesetzt, daß

$$l_1(z) = z + ae^z$$

eine rein imaginären Nullstellen hat. Wir zeigen:

Im Falle E_1, wo $P_0(x) = x$ eine reelle Nullstelle hat, ist die Gleichung (I) *nur bis auf eine additive Konstante lösbar, d. h. die Gleichung*

(III) $$\Lambda(y) = g(x) + c_g$$

at eine eigentliche Lösung. Dabei ist die Konstante c_g in eindeutiger

Weise durch die Funktion $g(x)$ bestimmt und ist im allgemeinen von Null verschieden. Dieser Mangel ist nicht behebbar. Das ergibt sich daraus, daß die Gleichung

$$\Lambda(y) = 1$$

keine eigentliche Lösung besitzt. Die Lösung der Gleichung (III) ist eindeutig bestimmt und erfüllt die Bedingung

$$y = O(|x|^{\bar{a}-1}), \quad y'(x) = O(|x|^{\bar{a}-1}),$$

wenn

$$\bar{g}(x) = g(x) + c_g = O(|x|^{\bar{a}})$$

ist. *Die homogene Gleichung*

$$\Lambda(y) = 0$$

hat abgesehen von der identisch verschwindenden keine eigentliche Lösung.

Im Falle E_2, wo $P_0(x) = x + i\eta$ keine reellen Nullstellen besitzt, hat die Gleichung (II) *eine und nur eine eigentliche Lösung, die sogar die Bedingung erfüllt*

$$y = O(|x|^{a-1}), \quad y'(x) = O(|x|^{a-1}).$$

Die homogene Gleichung hat keine nicht identisch verschwindende eigentliche Lösung.

Diese Sätze bleiben gültig für den allgemeinen Fall

$$E_2: \qquad \Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

wobei die $p_{\nu,\varrho}(x)$ linear in x sind.

Auch im allgemeinen Falle

$$E_1: \qquad \Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu}{}' p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

bleiben die obigen Sätze gültig, wenn nur die Größen $h_{n-1,\varrho}$ alle von Null verschieden sind. Hat dagegen $\Lambda(y)$ die Gestalt

$$\Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + (ax + b)\, y^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\nu_\varrho} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

so bleiben die Sätze nur gültig für $b > -1$.

Für $b < -1$ ändern sich die Aussagen. Das liegt in der Hauptsache daran, daß man jetzt aus der Stetigkeit der $(n-1)$ ersten Ableitungen von $y(x)$, die ja durch die Definition der eigentlichen Lösung gefordert wird, nicht mehr die Stetigkeit von $y^{(n)}(x)$ für alle x erschließen kann. Für $b < -1$ ergibt sich folgender Tatbestand:

Die Gleichung (II) ist immer lösbar. Die Lösung ist mit ihren n ersten Ableitungen stetig und genügt der Bedingung

$$y^{(\nu)}(x) = O(|x|^{n-1}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Die homogene Gleichung hat eine eigentliche Lösung, deren n-te Ableitung stetig ist für alle x. Es ist die einzige Lösung dieser Art,

Fast alle größeren Schwierigkeien des allgemeinen Falles, wo $P_0(x)$ vom Grade m ist, enthält der Fall quadratischer Koeffizienten, der an folgendem Beispiel erläutert wird:

$$A(y) = (x^2 + a_0)\,y'(x) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\,y(x+1),$$

$a_0 \neq 0$ und b_2, b_1, b_0 reell, $l_2(z) = z + b_2 e^z$ soll keine rein imaginären Nullstellen haben.

Ist zunächst $a_0 > 0$, hat also der Koeffizient der höchsten Ableitung keine reelle Nullstelle, so gilt: *Die Gleichung* (II) *ist im allgemeinen lösbar. Es gibt eine und nur eine eigentliche Lösung und sie erfüllt die Bedingung*

$$y = O(|x|^{n-2}), \qquad y' = O(|x|^{n-2}).$$

Die homogene Gleichung hat also in diesem Falle keine eigentliche Lösung.

Jedoch kann ein Ausnahmefall eintreten.

Die inhomogene Gleichung ist dann nur bis auf einen linearen Ausdruck lösbar; genauer

$$A(y) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II})$$

ist lösbar. Die durch $g(x)$ bestimmte Konstante c_g ist dabei im allgemeinen von Null verschieden. Die absoluten Konstanten A_{II} und B_{II} können nicht gleichzeitig beide verschwinden. Es fragt sich also, ob die Gleichung

$$A(y) = c_1 x + c_2$$

für beliebige c_1 und c_2 lösbar ist. Wir zeigen, daß vom Proportionalitätsfaktor abgesehen nur eine einzige Gleichung

$$A(y) = A_I x + B_I$$

eine eigentliche Lösung besitzt. Der Vektor (A_I, B_I) ist niemals Null und auch nie proportional zum Vektor (A_{II}, B_{II}). Also hat die inhomogene Gleichung (II) im allgemeinen keine eigentliche Lösung. Dagegen ist die Gleichung

$$A(y) = \bar{y}(x) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II}) + \lambda(A_I x + B_I)$$

lösbar; λ bedeutet einen willkürlichen Parameter. Diese Lösung erfüllt die Bedingung

$$y = O(|x|^{\bar{a}-2}), \quad y' = O(|x|^{\bar{a}-2}),$$

wenn

$$\bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{a}})$$

ist.

Die homogene Gleichung besitzt in diesem Falle eine und nur eine eigentliche Lösung, die sogar die Bedingung erfüllt

$$y(x) = O(e^{-\gamma_0|x|}),$$

wo γ_0 eine bestimmte positive Konstante ist.

Ist $a_0 < 0$, hat also der Koeffizient von $y'(x)$ reelle Wurzeln, so ist die inhomogene Gleichung nur bis auf einen additiven linearen Ausdruck lösbar, der nicht identisch zu verschwinden braucht. Da andererseits jetzt die Gleichung

$$\Lambda(y) = c_1 x + c_2$$

niemals lösbar ist, so läßt sich dieser Mangel nicht beseitigen. Die homogene Gleichung ist auch nicht lösbar.

Im allgemeinen Falle

$$\Lambda(y) = (x^2 + a_0) y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x) y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

($p_{\nu,\varrho}(x)$ quadratisch in x)

tritt nur für $a_0 < 0$ eine Änderung ein, wenn ein $h_{n-1,\varrho} = 0$ ist. Die Änderungen sind ähnlich wie beim linearen Fall. Der ausführende Teil enthält darüber nähere Mitteilungen.

Die zweite Mitteilung, die sich mit dem allgemeinsten Falle beschäftigt, kommt zu ähnlichen Resultaten. Auch hier ist, wenn $P_0(x)$ keine reellen Nullstellen hat, die inhomogene Gleichung im allgemeinen lösbar. Die homogene Gleichung hat keine eigentliche Lösung. Jedoch sind Ausnahmen möglich. Die homogene Gleichung besitzt dann eigentliche Lösungen, jedoch nie mehr als $\frac{m+1}{2}$ linear unabhängige; m bedeutet den Grad von $P_0(x)$. Die inhomogene Gleichung ist in diesen Ausnahmefällen in ähnlich beschränkter Weise lösbar wie im Falle quadratischen Koeffizienten. Nur treten an die Stelle der linearen Zusatzglieder Polynome $(m-1)$-ten Grades. Bei reeller Nullstelle von $P_0(x)$ ist die inhomogene Gleichung nur bis auf ein additives Polynom $(m-1)$-ten Grades lösbar, während die homogene Gleichung im allgemeinen keine eigentliche Lösung besitzt. Auch ist die Gleichung

$$\Lambda(y) = Q_{m-1}(x)$$

ür kein Polynom $(m-1)$-ten Grades lösbar. Jedoch können auch hier Ausnahmen der obigen Art eintreten. Näheres wird in der zweiten Mitteilung gesagt werden. Sind die $h_{\nu,\varrho}=0$, so liegen gewöhuliche Differenialgleichungen vor. Auch für diesen Fall sind die Resultate neu.

Ausführung.

Vor Beginn der eigentlichen Untersuchungen wollen wir noch auf ein Prinzip hinweisen, das im folgenden sehr häufig benutzt wird. Es sei in der z-Ebene $|\Re(z)| \leqq \gamma_0$ ein Parallelstreifen um die imaginäre Achse. Die Funktion $f(z)$ genüge den folgenden Bedingungen:

1. $f(z)$ ist im Streifen regulär und eindeutig,

2. zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine positive Zahl u_0, so daß für alle z des Streifens, für die $\Im(z) > u_0$ ist, d. h. für alle z oberhalb eines festen Querbalkens im Streifen

$$|f(z)| < \varepsilon$$

ist.

Hat dann noch für jede Vertikale $z = \gamma + iu$ des Streifens das geradlinige Integral

$$\varphi_\gamma(z) = \int_{\gamma+i\infty}^{z} f(z)dz = i\int_{\infty}^{u} f(\gamma+iu)du$$

einen Sinn, so läßt sich $\varphi_\gamma(z)$ durch analytische Fortsetzung als eine im ganzen Streifen eindeutige reguläre Funktion gewinnen. Das Prinzip besagt alsdann: Diese Funktion ist unabhängig von γ:

$$\varphi_\gamma(z) = \varphi_0(z).$$

Es ist also gleichgültig, auf welcher Vertikalen man ins Unendliche integriert.

Das folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Integralsatz. Der Leser möge sich bei jeder Anwendung dieses Satzes überzeugen, daß insbesondere die zweite Bedingung erfüllt ist.

§ 1.

Lineare Koeffizienten.

Der allgemeine Ausdruck

$$(\alpha x+\beta)y'(x)+(\gamma x+\delta)y(x+h)$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und reellem h läßt sich durch lineare reelle Transformationen in die Gestalt setzen

$$1) \quad \begin{aligned} \Lambda(y) &= x y'(x)+(ax+b)y_{(x+1)} = x(y'(x)+a\,y_{(x+1)})+b\,y_{(x+1)} \\ &= x L_1(y)+L_0(y); \end{aligned}$$

$$L_1(y) = y'(x) + a y_{(x+1)}; \qquad L_0(y) = b y_{(x+1)};$$
$$L_1(e^{zx}) = e^{zx} l_1(z); \qquad L_0(e^{zx}) = e^{zx} l_0(z);$$
$$l_1(z) = z + a e^z; \qquad l_0(z) = b e^z.$$

Setzt man

$$y = \int_C e^{zx} v(z) dz,$$

wobei C einen noch zu bestimmenden Integrationsweg bedeutet, so ist — partiell integriert —

$$x L_1(y) = \int_C x e^{zx} l_1(z) v(z) dz = [e^{zx} l_1(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} \frac{d}{dz}(l_1(z) v(z)) dz,$$

daher

$$\Lambda(y) = [e^{zx} l_1(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} A(v(z)) dz$$

oder

$$\Lambda(y) = [e^{zx} l(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} A(v(z)) dz, \tag{2}$$

wobei das Operationssymbol

$$A_z(w_{(z)}) = l_1(z) w'(z) + w(z)(l_1'(z) - l_0(z)) \tag{3}$$

gesetzt ist.

Jede Lösung $v(z)$ von

$$A_z(v) = 0$$

heißt Laplacesche Transformierte und liefert bei passend gewähltem Integrationsweg eine Lösung y der homogenen Gleichung

$$\Lambda(y) = 0.$$

Von einem willkürlichen Faktor abgesehen ist

$$v(z) = e^{\int^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} l_1^{-1}(z)$$

eindeutig bestimmt und bis auf die Nullstellen von $l_1(z)$ regulär. In jedem Vertikalstreifen, der in endlicher Breite beiderseits um die imaginäre Achse gelegt ist, gibt es nur endlich viele Nullstellen von $l_1(z)$. In der Tat ist für $|\Re(z)| < c$:

$$|l_1(z)| > |z| \left| 1 - \frac{|a| e^c}{|z|} \right|.$$

Die Nullstellen sind ferner isoliert. Rein imaginäre Wurzeln sind nur möglich für $a = 0$ und für

$$a = (-1)^{k+1} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (k \text{ ganzzahlig}).$$

Schließen wir diese Werte von a aus, so gibt es einen Streifen

$|\Re(z)| \leqq \gamma_0$, in dem keine Wurzeln von $l_1(z)$ liegen. Er wird weiterhin kurz „der Streifen" genannt.

Die Anwendung der Laplaceschen Transformation auf die inhomogene Gleichung

$$A(y) = g(x); \quad [g^{\nu}(x) = O(|x|^{a}); \ \nu = 0, 1, 2, 3] \tag{4}$$

führt rein formal, d. h. von Konvergenz abgesehen auf Grund der Fourierschen Identität

$$2\pi i\, g(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt\, dz$$

gemäß (2) auf die Gleichung

$$A_z(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt$$

oder, da t nur Parameter ist, auf die Gleichung

$$A_z(w) = e^{-zt}.$$

Der Ausdruck

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} \int_{-\infty}^{+\infty} w(z, t)\, dt\, dz$$

wäre dann eine formale Lösung von (4).

Um jedoch dieser Methode analytischen Sinn zu geben, suchen wir eine Lösung von

$$A_z(w) = e^{-zt}(z+s)^{-3}. \tag{5}$$

s ist dabei eine reelle positive Konstante: $s > \gamma_0 > 0$. Den störenden Einfluß des konvergenzerzeugenden Faktors $(z+s)^{-3}$ auf die Lösung von (4) werden wir später beseitigen.

$$\overset{1}{w}(z, t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} (\zeta + s)^{-3}\, d\zeta$$

$$\overset{2}{w}(z, t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} \int_{+i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} (\zeta + s)^{-3}\, d\zeta$$

sind zwei Lösungen von (5).

z läuft dabei auf der imaginären Achse. Die Integrationen erstrecken sich geradlinig. Die Integrale sind absolut konvergent, weil

$$\int_0^{i\infty} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} ds \quad \text{und} \quad \int_0^{-i\infty} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} ds$$

einen bestimmten Sinn haben, wie man durch partielle Integration erkennt. Wir definieren nun

$$\overset{1}{U}(x,t)=\int_{-i\infty}^{0} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz, \qquad \overset{2}{U}(x,t)=\int_{0}^{i\infty} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz.$$

Da für große z

$$|l_1^{-1}|<\frac{C_1}{|z|}; \quad \left|e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}\right|<C_2; \quad \left|e^{-\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}\right|<C_3$$

ist, wobei C_1, C_2, C_3 absolute Konstante sind, so ist auf der imaginären Achse $z=iu$

$$|\overset{1}{w}(z,t)|<C|u|^{-1}\int_{-\infty}^{u}(u^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

und

$$|\overset{2}{w}(z,t)|<C|u|^{-1}\int_{u}^{\infty}(u^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}\,du.$$

$\overset{1}{U}$ und $\overset{2}{U}$ sind daher absolut und in x gleichmäßig konvergent und können einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden.

$A(\overset{1}{U}(x))$ und $A(\overset{2}{U}(x))$ haben einen Sinn und es ist gemäß (2) und (5)

$$A(\overset{1}{U}(x))=\left[e^{zx}e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}\int_{-i\infty}^{z}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta\right]_{-i\infty}^{0}-\int_{-i\infty}^{0}e^{zx}A_x(\overset{1}{w})\,dz$$

$$=\int_{-i\infty}^{0}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{-i\infty}^{0}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz.$$

Entsprechend ist

$$A(\overset{2}{U}(x))=\int_{0}^{i\infty}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{0}^{i\infty}e^{z(x-t)}(\zeta+s)^{-3}\,dz.$$

Wird nun $U(x,t)$ durch die Summe definiert

$$U(x,t)=\overset{1}{U}(x,t)+\overset{2}{U}(x,t),$$

so ist

$$A(U)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz$$

$$=\psi(t)-\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz.$$

Nun ist

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz = \pi i\, e^{s(x-t)}(x-t)^2 \quad \text{für } x-t \geqq 0,$$
$$= 0 \quad \text{für } x-t \leqq 0.$$

Also schließlich

$$6) \qquad \Delta(U(x)) = \psi(t) - \varepsilon\pi i e^{-s(x-t)}(x-t)^2; \quad \varepsilon = \begin{matrix} 1 \text{ für } x-t \geqq 0, \\ 0 \text{ für } x-t \leqq 0. \end{matrix}$$

Es bedeute $\Delta_{3,*}$ diejenige lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, für welche die Identität besteht:

$$\Delta_{3,x}(e^{zx}) = e^{zx}(z+s)^3,$$

d. h.

$$\Delta_{3,*}(g) = g''' + 3sg'' + 3s^2g' + s^3g.$$

Wird nun

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g(t))\, U(x,t)\,dt$$

gesetzt, so behaupten wir

$$(7) \qquad \Delta\left(-\frac{1}{2\pi i} W(x)\right) = g(x) + c_g,$$

wo c_g eine Konstante ist.

$W(x)$ ist also bis auf eine additive Konstante eine Lösung von (4) und, wie sich noch zeigen wird, auch eine eigentliche Lösung. c_g ist im allgemeinen von Null verschieden. Unsere Aufgabe, eine eigentliche Lösung von (4) zu finden, ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$\Delta(y) = 1$$

eine eigentliche Lösung hat. Wir werden später noch zeigen, daß das nicht der Fall ist. Die vorgelegte Gleichung (4) ist also nur bis auf eine Konstante lösbar. Dieser Mangel hat seinen Grund in der Tatsache, daß $x = 0$ eine singuläre Stelle für $\Delta(y)$ ist. Bereits für die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung

$$M(y) = xy'(x) + (ax+b)y(x) = g(x)$$

läßt sich, wie man leicht sieht, im allgemeinen keine eigentliche Lösung finden, die zugleich stetig für $x = 0$ wäre. Dies wird auch für $b = 0$ bei unserer funktionalen Differentialgleichung offenbar.

Um nun die Behauptung (7) zu beweisen, werde zunächst als schon bewiesen angesehen, daß $W(x)$ absolut und in x gleichmäßig konvergiert und einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann. Dann ist wegen (6)

$$(8)\qquad \Delta(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{s,t}(g(t))\,\Delta(U)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{s,t}(g(t))\,\psi(t)\,dt$$
$$- \int_{-\infty}^{x} \pi i e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,\Delta_{s,t}(g(t))\,dt$$
$$= -2\pi i c_g - \pi i \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,\Delta_{s,t}(g(t))\,dt.$$

Die Konvergenz nach t wird später bewiesen.

Das letzte Integral ist nun gleich $g(x)$. Das ergibt sich mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz I. *Ist*

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,dt$$

ein absolut konvergentes Integral, so ist

$$\Delta_{s,x}(\varphi_2(x)) = 2\,\chi(x)$$

und allgemein

$$\Delta_{k,x}(\varphi_{k-1}(x)) = (k-1)!\,\chi(x),$$

wobei Δ_k definiert ist durch

$$\Delta_{k,z}(e^{sx}) = e^{sx}(z+s)^k$$

und analog

$$\varphi_{k-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}\,\chi(t)\,dt.$$

Beweis. Der Satz ist für $k=1$ richtig:

$$\Delta_1(\varphi_0) = \varphi_0' + s\varphi_0$$
$$= \chi(x)e^{-s\,0} - s\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}\,dt + s\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}\,dt = \chi(x).$$

Der Satz sei für $k-1$ richtig:

$$\Delta_{k-1}(\varphi_{k-2}) = (k-2)!\,\chi(x).$$

Dann ist

$$\Delta_k(\varphi_{k-1}) = \Delta_{k-1}(\Delta_1(\varphi_{k-1})) = \Delta_{k-1}(\varphi_{k-1}' + s\varphi_{k-1})$$
$$= \Delta_{k-1}\{0 - s\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}dt + (k-1)\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-2}dt$$
$$+ s\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}dt\} = (k-1)\,\Delta_{k-1}(\varphi_{k-2}) = (k-1)!\,\chi(x),$$

w. z. b. w. Es ist daher

$$\Delta_{s,x}\left[\Delta\left(-\tfrac{1}{\pi i}W\right) - 2c_g\right] = 2\,\Delta_{s,x}(g(x))$$

oder

$$\Delta_{s,x}\left\{\Delta\left(-\tfrac{1}{2\pi i}W\right) - c_g - g(x)\right\} = 0.$$

$\Delta_{s,x}(y) = 0$ hat aber nur Lösungen von der Form

$$y = e^{-sx}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Es ist also nur dann

$$\lim_{s=-\infty} e^{sx} y = 0,$$

wenn y identisch verschwindet. Können wir nun diese Eigenschaft an der Funktion

$$y = \Lambda\left(-\frac{1}{2\pi i} W\right) - c_g - g(x)$$

nachweisen, so ist damit Gleichung (7) bewiesen.

Für große negative x ist aber nach (8)

$$|\Lambda(W) e^{sx}| \leqq e^{sx} 2\pi |c_g| + \pi \left| \int_{-\infty}^{x} e^{st} \Delta_{s,t}(g(t))\,(x-t)^2\,dt \right|$$

$$\leqq C e^{sx} + \pi \int_{-\infty}^{x} e^{st} |\Delta_{s,t}(g)|\,4\,|t|^2\,dt \leqq C e^{sx} + C \int_{-\infty}^{x} e^{(s-\eta)t}\,dt < C_1 e^{(s-\eta)x},$$

also

$$\lim_{s=-\infty} \Lambda(W) e^{sx} = 0.$$

Ferner ist

$$\lim_{s=-\infty} e^{sx} g(x) = 0.$$

Also folgt

$$\Lambda\left(-\frac{1}{2\pi i} W\right) = g(x) + c_g.$$

Wir wollen nun die Konvergenz der auftretenden Integrale beweisen.

Da $\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma$, wenn z und der Integrationsweg innerhalb des Streifens bleiben, eine reguläre für den ganzen Streifen beschränkte analytische Funktion von z darstellt, so ist — die Integrationswege innerhalb des Streifens verstanden —

$$\overset{1}{w}(z) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-3}\,d\zeta$$

eine im ganzen Streifen reguläre analytische Funktion von z.

Der Integrationsweg für ζ läßt sich auch auf eine im Streifen verlaufende Vertikale $z = \gamma + iu$ $(\gamma_0 > |\gamma| > 0)$ verschieben. Man kann also schreiben:

$$\overset{1}{w}(z) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{\gamma-i\infty}^{z} \ldots d\zeta.$$

Auf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ ergibt sich daher die Abschätzung

$$(8) \qquad |\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t}|z|^{-1}\int_{-\infty}^{u}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-\frac{3}{2}}du.$$

Ebenso ergibt sich die Regularität von $\overset{2}{w}(z,t)$ und die Ungleichung

$$(9) \qquad |\overset{2}{w}(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t}|z|^{-1}\int_{u}^{\infty}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-\frac{3}{2}}du.$$

(10) Die Konstante ist dabei von γ unabhängig wählbar.

Die Integrale

$$\overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma-i0} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz, \qquad \overset{2}{U}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma+i0}^{\gamma+i\infty} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz$$

haben also einen Sinn und sind einmal unter dem Integralzeichen nach x differenzierbar.

Wegen (8), (9), (10) gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) - \int_{\gamma}^{0} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz,$$

$$\overset{2}{U}_\gamma(x,t) = \overset{2}{U}(x,t) + \int_{\gamma}^{0} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz,$$

$$(11) \qquad U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \int_{0}^{\gamma} e^{zx}(\overset{2}{w}(z,t) - \overset{1}{w}(z,t))\,dz.$$

Nun gilt mit Rücksicht auf (8)

$$(12) \qquad |\overset{1}{U}_\gamma(x,t)| < \text{konst.}\, e^{\gamma(x-t)};$$

$$|\overset{2}{U}_\gamma(x,t)| < \text{konst.}\, e^{\gamma(x-t)} \quad \text{(konst. von } \gamma \text{ unabhängig).}$$

Ferner ist

$$(13) \quad \left|\int_0^{\gamma} e^{zx}(\overset{2}{w}-\overset{1}{w})\,dz\right| = \left|\int_0^{\gamma} e^{zx} l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}\,dz \cdot \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}d\zeta\right|$$

$$= \left|\int_0^{\gamma} e^{zx} l_1^{-1}(z) e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}\,dz\right| \cdot |\psi(t)| < |\psi(t)| \cdot \text{konst.}\,(e^{\gamma x} + e^{0\cdot x})$$

$$= \text{konst.}\,|\psi(t)|(e^{\gamma x}+1).$$

Es ist aber auch — ganz wie früher —

$$\psi(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}d\zeta$$

und mithin

14) $$|\psi(t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t}.$$

Da γ positiv und negativ gewählt werden kann, so folgt, indem man γ immer das Vorzeichen von t gibt,

15) $$|\psi(t)| < \text{konst. } e^{-|\gamma t|}.$$

Es folgt aus (13), (14), (15)

$$\left|\int_0^\gamma e^{zx}(\overset{2}{w} - \overset{1}{w})\,dz\right| < \text{konst. } e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}$$

und, da man in (13) γ auch immer das Vorzeichen von $-(x-t)$ geben kann,

16) $$|U(x,t)| < \text{konst. } (e^{-|\gamma|\,|x-t|} + e^{-|\gamma|\,|t|}).$$

Dieselbe Ungleichung ergibt sich für $\frac{d}{dx}(U)$. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $W(x)$, sowie die einmalige Differenzierbarkeit unter dem Integralzeichen ergibt sich daraus unmittelbar. Aus (15) folgt auch die Konvergenz von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g(t))\,\psi(t)\,dt.$$

Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist. Es ist

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g)\,U(x,t)\,dt.$$

Aus (16) folgt

$$|W(x)| < \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{3,t}(g)|\,e^{-|\gamma|\,|x-t|}\,dt + \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{3,t}(g(t))|\,e^{-|\gamma|\,|t|}\,dt.$$

Der erste Summand der rechten Seite ist von der Form

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\,e^{-|\gamma|\,|x-t|}\,dt,$$

wobei $\chi(t) = O(|t|^a)$ ist. Gemäß einem von E. Schmidt[3]) bewiesenen *Hilfssatze* folgt daraus

$$S(x) = O(|x|^a).$$

Der zweite Summand ist $O(|x|^0)$. Also ergibt sich jedenfalls

$$W(x) = O(|x|^b),$$

wo $b \geqq a$ ist. Aus

$$\Delta(W) = -2\pi i\,g(x)$$

[3]) A. a. O. S. 522.

folgt

$$L_1(W) = \frac{-2\pi i g(x) - L_0(W)}{x} = O(|x|^{b-1}).$$

Da $l_1(z)$ keine rein imaginäre Nullstelle hat, so folgt nach dem in der Einleitung erwähnten Satze T_I von E. Schmidt

$$W(x) = O(|x|^{b-1}), \qquad W'(x) = O(|x|^{b-1}).$$

Dieser Schluß läßt sich fortsetzen, bis schließlich

$$W(x) = O(|x|^{a-1}), \qquad W'(x) = O(|x|^{a-1})$$

sich ergibt.

Den Beweis für die Behauptung, daß

$$A(y) = 1$$

keine eigentliche Lösung hat, werden wir etwas später beim Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung erbringen. Wir behandeln vorher den einfacheren Fall, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung keine reelle Nullstelle hat, also unser Beispiel so aussieht:

$$A(y) = (x + i\eta)\, y'(x) + (ax + b)\, y(x+1) = g(x),$$

wobei etwa $\eta > 0$ und a, b irgendwelche nicht notwendig reelle Zahlen sind, dagegen $l_1(z)$ wieder keine rein imaginären Nullstellen haben soll. Hier ist

$$l_1(z) = z + ae^z; \qquad l_0(z) = i\eta z + be^z.$$

Es ist ferner

$$e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} = e^{i\eta z}\, e^{\int_0^z \frac{(b - i\eta a) e^\sigma}{a + ae^\sigma} d\sigma} = e^{i\eta z}\, e^{\int_0^z \frac{\bar{l}_0}{l_1} d\sigma} \tag{17}$$

Dabei ist der zweite Faktor im ganzen Streifen regulär und beschränkt. Die Funktion

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-2}\, d\zeta$$

ist daher im ganzen Streifen definiert und regulär und stellt dort eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$A(w) = e^{-zt}(z+s)^{-2}$$

dar. Da wieder die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie in dem Integral über $d\zeta$ erfüllt sind, so ist wieder

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{\gamma - i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\zeta} (\zeta + s)^{-2}\, d\zeta.$$

uf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ gilt die Abschätzung $(\zeta = \gamma + i\varrho)$

$$|w(z,t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t} e^{-\eta u} \int_{-\infty}^{u} e^{\eta\varrho} (\varrho^2 + (\gamma+s)^2)^{-1} \, d\varrho .$$

e Funktion $e^{\frac{\eta}{2}\varrho}(\varrho^2+(\gamma+s)^2)^{-1}$ hat bei genügend groß gewähltem s ne immer positive Ableitung. Daher ist

$$\int_{-\infty}^{u} e^{\frac{\eta}{2}\varrho}(\varrho^2+(\gamma+s)^2)^{-1} e^{\frac{\eta}{2}\varrho} d\varrho < e^{\frac{\eta}{2}u}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-1} \int_{-\infty}^{u} e^{\frac{\eta}{2}\varrho} d\varrho$$

d also

8) $|w(z,t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-1}|z|^{-1}$ (konst. von γ unabhängig).

as Integral

(8a) $$U_\gamma(x,t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} w(z,t)\, dz$$

t also einen Sinn und es gilt die Ungleichung

$$|U_\gamma(x,t)| < \text{konst. } e^{\gamma(x-t)}.$$

Für $\gamma = 0$ zeigt uns die Ungleichung (18), daß

$$U(x,t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} w(z,t)\, dz$$

nen Sinn hat und einmal unter dem Integralzeichen nach x differenzier- r ist. Da ferner wegen (18) die Bedingungen für die Verschiebung der tegrationslinien erfüllt sind, so ist

$$U(x,t) = U_\gamma(x,t).$$

Aus (18a) folgt also, da man γ immer das $(x-t)$ entgegengesetzte ichen geben kann,

$$|U(x,t)| < \text{konst. } e^{-|\gamma|\,|x-t|}.$$

enso gilt auch

$$\left|\frac{d}{dx}(U(x,t))\right| < \text{konst. } e^{-|\gamma|\,|x-t|}.$$

s Integral

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{g,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

t also einen Sinn und ist absolut und in x gleichmäßig konvergent und rf unter dem Integralzeichen nach x einmal differenziert werden. Wir haupten, daß W eine Lösung der Gleichung

$$\Delta\left(-\frac{1}{\pi i} W\right) = g(x)$$

ist. Es ist nämlich

$$\Lambda(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \Lambda(U(x,t))\, dt = -\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g(t))\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt.$$

Ganz wie früher können wir jetzt unter Anwendung des Satzes I, S. 4 schließen

$$\Lambda\left(-\frac{1}{\pi i} W\right) = g(x).$$

W ist auch eine eigentliche Lösung. Aus

$$|W(x)| < \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{2,t}(g(t))|\, e^{-|\gamma||x-t|}\, dt$$

folgt nach dem Hilfssatz von E. Schmidt, S. 49

$$W = O(|x|^a)$$

und also auch

$$W' = O(|x|^a),$$

woraus sich in bekannter Weise auf

$$W = O(|x|^{a-1}), \qquad W' = O(|x|^{a-1})$$

schließen läßt.

§ 2.

Eindeutigkeit der Lösungen.

Es fragt sich, ob es noch andere eigentliche Lösungen y der Glei chung $\Lambda(y) = g(x)(+c_q)$ gibt, d. h. solche stetige Lösungen, die de Bedingung $y = O(|x|^b)$ (b irgendeine Zahl) genügen. Wir werden zeigen

Hat $l_1(z)$ keine reine imaginäre Nullstelle, so gibt es eine und nu eine eigentliche Lösung dieser Gleichung.

Diese Behauptung ist offenbar identisch mit dem folgenden Sat über die homogene Gleichung $\Lambda(y) = 0$:

Hat $l_1(z)$ keine rein imaginäre Nullstelle, so gibt es außer der iden tisch verschwindenden keine eigentliche Lösung der homogenen Gleichung

Das Operationszeichen Λ kann dabei beide Bedeutungen

$$E_1 = xy' + (ax+b)\, y(x+1),$$
$$E_2 = (x + i\eta)\, y' + (ax+b)\, y(x+1)$$

haben. Auch jetzt werden sich Unterschiede zeigen. Der zweite Fall e ledigt sich wieder rascher.

Zunächst folgt aus der Stetigkeit einer Lösung von $\Lambda(y) = 0$ f alle x in diesem Falle ohne weiteres auch die von $y'(x)$ für alle Im ersten Falle ist die Stelle $x = 0$ fraglich, doch folgt auch hierfür d Stetigkeit von $y'(x)$.

In der Tat muß zunächst

$$\lim_{x=0} x y'(x) = 0$$

in. Wäre nämlich

$$\lim_{x=0} x y'(x) = -by(1) \neq 0,$$

sei geschrieben

$$x y'(x) = -by(1) + \delta(x),$$

bei

$$\lim_{x=0} \delta(x) = 0.$$

Es sei nun a_0 positiv so gewählt, daß $|\delta(x)|$ im Intervall $(0, a_0)$ terhalb $\left|\frac{by(1)}{2}\right|$ bleibt. ε sei nahe an Null. Dann ist

$$\left|\int_{a_0}^{\varepsilon} y'(x)\,dx\right| = \left|y(\varepsilon) - y(a_0)\right| = \left|by(1)\int_{a_0}^{\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{a_0}^{\varepsilon}\frac{\delta(x)}{x}dx\right|$$

$$|by(1)(\log\varepsilon - \log a_0) + \delta(x_m)(\log\varepsilon - \log a_0)| > \frac{|by(1)|}{2}|\log\varepsilon - \log a_0|,$$

bei $0 \leqq x_m \leqq a_0$; y würde also für $x = 0$ unendlich groß werden. aher ist

$$by(1) = 0.$$

Aus

$$y'(x) = -ay(x+1) - b\frac{y(x+1) - y(1)}{x}$$

lgt dann

$$\lim_{x=0} y'(x) = -ay(1) - by'(1).$$

ie Ableitung ist also auch für $x = 0$ stetig; denn es ist bekanntlich mer

$$y'(0) = \lim_{x=0} y'(x),$$

enn dieser Grenzwert existiert. Also ist auch die Ableitung jeder eigentlichen Lösung überall stetig. Aus $y = O(|x|^b)$ folgt wegen $\Delta(y) = 0$ türlich auch $y' = O(|x|^b)$.

Hilfssatz 1. *Jede eigentliche Lösung muß im Unendlichen stärker rschwinden als jede noch so hohe negative Potenz von x:*

$$y = O(|x|^{-\infty}), \qquad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Beweis.

$$L_1(y) = -\frac{L_0(y)}{x} = O(|x|^{b-1}).$$

ie rechts stehende Funktion ist für alle x stetig, weil es die links stehende nktion ist. Nach dem schon erwähnten Satz T_I von E. Schmidt folgt

$$y = O(|x|^{b-1}), \qquad y' = O(|x|^{b-1}).$$

ese Schlußweise fortgesetzt liefert die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist y irgendeine stetige Funktion derart, daß für sie die Fouriersche Integraldarstellung gilt, und ist*

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} y(t)\, dt = 0$$

für alle reellen u, so ist

$$y \equiv 0.$$

Die Behauptung ist sofort aus der Fourierschen Integraldarstellung

$$2\pi i y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} y(t)\, dt\, du.$$

abzulesen. Gäbe es nun eine eigentliche Lösung y der homogenen Gleichung, so ist nach Hilfssatz 1

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx$$

nebst sämtlichen Ableitungen für rein imaginäre α definiert. Wir behaupten

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = l_1(\alpha)\varphi'(\alpha) + (l_1'(\alpha) - l_0(\alpha))\varphi(\alpha) = 0. \tag{19}$$

Es ist nämlich

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} A(y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} L_1(y)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} L_0(y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} y'(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} a y(x+1)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} b y(x+1)\, dx$$

$$= [y x e^{-\alpha x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)(e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x})\, dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1) e^{-\alpha x} e^{\alpha} y(x)\, dx$$

$$+ b e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx = -\{l_1(\alpha)\varphi'(\alpha) + (l_1'(\alpha) - l_0(\alpha))\varphi(\alpha)\}.$$

Bei dieser Herleitung hatte $A(y)$ die Bedeutung E_1. Offenbar ändert sich nichts, wenn $A(y)$ die Bedeutung E_2 hat. In diesem Falle können wir aus (19) jetzt schon schließen

$$y \equiv 0.$$

In der Tat lehrt uns (17), daß dann das Integral $v(\alpha)$ der Differentialgleichung

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0$$

auf der imaginären Achse nach einer Richtung hin unendlich groß wird. Dagegen bleibt

$$|\varphi(\alpha)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\, dx$$

für alle rein imaginären α beschränkt. Daher ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

also nach Hilfssatz 2

$$y \equiv 0.$$

Im Falle E_1 bedarf es einer eingehenden Betrachtung. Wir haben gesehen, daß aus der Stetigkeit von $y(x)$ diejenige von $y'(x)$ auch für $x = 0$ folgte. Es folgt ebenso diejenige aller anderen Ableitungen, insbesondere der zweiten. Zunächst muß wieder

$$\lim_{x=0} x\,y''(x) = -\,y'(0) - b\,y'(1) + a\,y(1) = 0$$

sein. Der Beweis ist wie oben bei $x\,y'(x)$.

Aus der Gleichung

$$y'(x) = -\frac{(ax+b)\,y(x+1)}{x}$$

ergibt sich, daß für $x \neq 0$ $y(x)$ mit sämtlichen Ableitungen stetig ist. Daher ist die Funktion

$$h(x) = -\,(ax+b)\,y'(x+1) + a\,y(x+1)$$

in $x = 0$ und einer Umgebung mit ihren sämtlichen Ableitungen stetig. Nun gilt die Beziehung

$$x\,y''(x) + y'(x) = h(x).$$

Diese inhomogene Differentialgleichung für $y'(x)$ hat die einzige stetige Lösung

$$y'(x) = \frac{\int_0^x h(t)\,dt}{x}.$$

Für diese Lösung ist

$$y''(x) = \frac{h(x)}{x} - \frac{\int_0^x h(t)\,dt}{x^2} = \frac{h(x)-h(0)}{x} - \frac{\int_0^x h(t)\,dt - x\,h(0)}{x^2}$$

$$= h'(\vartheta_1 x) - \frac{\frac{h'(0)}{2}x^2 + \int_0^x h''(\vartheta t)\frac{t^2}{2!}dt}{x^2} = h'(\vartheta_1 x) - \frac{h'(0)}{2} + \frac{\int_0^x t^2 h''(\vartheta t)\,dt}{2x^2}.$$

Nun ist

$$\left|\int_0^x h''(\vartheta t)\,t^2\,dt\right| \leqq M\int_0^x t^2\,dt = M\frac{|x|^3}{3},$$

wo M das Maximum der stetigen Funktion $h''(x)$ etwa im Intervall $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ bedeutet. Also ist

$$\lim_{x=0} y''(x) = \frac{h'(0)}{2}.$$

Auch die zweite Ableitung ist also stetig in $x = 0$. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |y''(x)|\,dx$ existiert also, zumal natürlich auch

$$y''(x) = O(|x|^{-\infty})$$

sein muß. Es ist aber

$$\alpha^2 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \alpha^2 y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\,dx.$$

Also muß

$$|\alpha^2 \varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y''|\,dx$$

sein. Andererseits wird, wenn $v(\alpha)$ das Integral der Differentialgleichung

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0$$

bedeutet, im vorliegenden Falle E_1

$$|\alpha^2 v(\alpha)|$$

bei rein imaginärem α unendlich groß. Daher ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

also auch

$$y \equiv 0.$$

Wir wollen nun den Beweis nachholen für die Behauptung, daß

$$A(y) = x\,y'(x) + (ax + b)\,y(x+1) = 1$$

keine eigentliche Lösung hat. Zunächst können wir aus der Stetigkeit von $y(x)$ genau wie im Falle der homogenen Gleichung auf die Stetigkeit von $y', y'', \ldots$ auch für $x = 0$ schließen. Wäre nun etwa

$$y = O(|x|^{\mathfrak{b}}),$$

so folgt zunächst für $\mathfrak{b} \geqq -1$

$$y' = O(|x|^{\mathfrak{b}}).$$

Der Satz T_I von E. Schmidt gestattet uns ferner die Zahl $\mathfrak{b}$ herabzudrücken bis auf -1. Es ist also sicher

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir können noch mehr schließen. Durch Differentiation von

$$A(y) = 1$$

ergibt sich

$$x\,L_1(y') + L_1(y) + L_0(y') = 0.$$

Aus

$$L_1(y') = \frac{-L_1(y) - L_0(y')}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

olgt

$$y' = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Durch nochmalige Differentiation von $A(y)$ schließt man

$$y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Die durch die Gleichung

$$\alpha^2 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx$$

efinierte Funktion $\varphi(\alpha)$ ist für alle rein imaginären $\alpha \neq 0$ bestimmt und ißt sich differenzieren. Es ist nämlich

$$2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y''(x)\, dx.$$

Aus

$$\frac{d^2}{dx^2}(A(y)) = x L_1(y'') + 2 L_1(y') + L_0(y'') = 0$$

olgt für $\alpha \neq 0$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^2}{dx^2}(A(y))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y'''(x)\, dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y''(x+1)\, dx$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx + 2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'(x+1)\, dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x+1)\, dx.$$

Die Integrale sind hierbei absolut konvergent. Die gleichen Umrmungen wie früher führen zur Gleichung

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x y''\, dx + a e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x y''\, dx - a e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx + \frac{2 a e^{\alpha}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx + b e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx,$$

h.

$$0 = -\alpha^2 \varphi(\alpha) - \alpha(2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha)) - a e^{\alpha}(2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha))$$
$$- a e^{\alpha} \alpha^2 \varphi(\alpha) + 2\alpha^2 \varphi(\alpha) + 2\alpha a e^{\alpha} \varphi(\alpha) + \alpha^2 b e^{\alpha} \varphi(\alpha).$$

Oder durch $\alpha^2 \neq 0$ dividiert

$$\varphi'(\alpha)(\alpha + a e^{\alpha}) + (1 + a e^{\alpha} - b e^{\alpha})\varphi(\alpha) = 0,$$

so für $\alpha \neq 0$

$$\varphi(\alpha) = c\, l_1^{-1}(\alpha)\, e^{\int^{\alpha} \frac{l_0}{l_1} d\sigma}.$$

Nun wird aber

$$\left| \alpha^2 l_1^{-1}(\alpha)\, e^{\int_a^{\alpha} \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \right|$$

bei rein imaginärem α mit α unendlich groß. Dagegen bleibt

$$|\alpha^2 \varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y''|\, dx.$$

beschränkt. Also ist $\varphi(\alpha)$ sowohl für positive wie negative $i\alpha$ identisch Null. Daraus folgt, da y'' den Bedingungen für die Darstellung durch ein Fouriersches Integral genügt,

$$y''(x) \equiv 0$$

und wegen

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y \equiv 0,$$

was der Gleichung

$$\Lambda(y) = 1$$

widerspricht.

Sämtliche Betrachtungen und Sätze bleiben bestehen für den allgemeinen Fall E_2:

$$\Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + (\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1})\, y^{(n-1)}(x - h_{n-1}) + \cdots + (\alpha_0 x + \beta_0)\, y(x - h_0)$$

oder noch allgemeiner

$$\Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

wo die $p_{\nu,\varrho}(x)$ lineare Ausdrücke in x sind. Für den Fall E_1

$$\Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + (\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1})\, y^{(n-1)}(x - h_{n-1}) + \cdots + (\alpha_0 x + \beta_0)\, y(x - h_0)$$

oder allgemeiner

$$\Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

behalten ebenfalls alle Sätze und Beweise ihre Gültigkeit, wenn h_{n-} bzw. die Größen $h_{n-1,\varrho}$ sämtlich von Null verschieden sind. Im anderen Falle, wenn also $\Lambda(y)$ die Gestalt hat

$$\Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + (ax + b)\, y^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

bedarf es einiger Aufmerksamkeit.

Für $b > 1$ bleiben alle Sätze richtig. Insbesondere läßt sich die Stetigkeit von $y^{(n)}(x)$ aus der Stetigkeit der $(n-1)$ ersten Ableitungen erschließen. Das ist für $b < -1$ nicht mehr der Fall. In diesem Falle verlieren unsere Behauptungen ihre Gültigkeit. Schon die Entwicklungen, die zur Lösung der inhomogenen Gleichung erforderlich sind, ändern sich hier. Wir definieren jetzt

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-[-b]-2} d\zeta$$

als eine Lösung der Differentialgleichung

$$A_s(w) = e^{-zt}(z+s)^{-[-b]-2}.$$

Das Integral

$$U(x,t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} w(z,t)\, dz$$

hat einen Sinn und ist einmal nach x differenzierbar. Für die Funktion

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{[-b]+2,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

ergibt sich ganz ähnlich wie früher

$$\Lambda(W) = g(x).$$

Die inhomogene Gleichung ist also hier immer völlig lösbar.

Die singuläre Stelle $x = 0$ stört nicht. Wir werden das auch noch an anderer Stelle erkennen. Die homogene Gleichung

$$\Lambda(y) = 0$$

hat die eigentliche Lösung

$$y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} dz.$$

Für diese Lösung ist auch $y^{(n)}(x)$ stetig. Wir behaupten: Es ist die einzige eigentliche Lösung dieser Art, wenn man von dem willkürlichen Faktor absieht. Wäre etwa

$$\Lambda(Y) = 0$$

und $Y^{(n)}(x)$ auch in $x = 0$ stetig, so ergäbe sich ganz wie früher

$$v(\alpha) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\alpha x} Y(x)\, dx.$$

Andererseits ist auch

$$v(\alpha) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx.$$

Durch Subtraktion folgt daraus die Behauptung. Die inhomogene Gleichung

$$A(y) = 1$$

muß in diesem Falle auch eine eigentliche Lösung besitzen. Sie lautet:

$$\int_0^\infty e^{zx} l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma}\, dz.$$

Damit sind für den linearen Fall alle Behauptungen bewiesen.

§ 3.

Quadratische Koeffizienten.

Definition. *Von einer Funktion $\varphi(x)$ der reellen Variablen x sagen wir, sie habe für $x = +\infty$ die charakteristische Zahl ϱ, oder auch kurz, sie gehöre zu ϱ,* wenn

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \varrho$$

ist.

Bemerkung 1. *Hat eine Funktion $\varphi(x)$ für $x = +\infty$ eine charakteristische Zahl, etwa ϱ, so ist von einem gewissen x_0 an*

$$\varphi(x) \neq 0.$$

(Dies kann aus der Existenz des $\lim \frac{\varphi'}{\varphi}$ nicht unmittelbar geschlossen werden, da diese den Fall des gleichzeitigen Verschwindens von φ und φ' noch offen läßt.)

Beweis. Sei zunächst $\varphi(x)$ eine reelle Funktion und $\varrho \neq 0$. Würde $\varphi(x)$ oberhalb jeder Grenze Null werden, so hätte sie auch oberhalb jeder Grenze von Null verschiedene Maxima oder Minima. An diesen Stellen verschwindet die Ableitung, es könnte also ϱ nicht verschieden von Null sein. Ist nun $\varrho = 0$, so hat $\varphi_1 = e^x \varphi$ die charakteristische Zahl 1, ist also von einem gewissen x an von Null verschieden. Das gilt dann aber auch von φ. Für komplexe Funktionen genügt es, auf die Identität hinzuweisen

$$\frac{(|\varphi|^2)'}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2} \Re\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) \to \frac{1}{2} \Re(\varrho),$$

also ist von einem gewissen x an

$$|\varphi(x)| \neq 0.$$

Bemerkung 2. *Gehören für $x = +\infty$ die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zu den Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 und ist $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2)$, so ist*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = 0.$$

Beweis. Es ergeben sich zunächst für große x leicht die Ungleichungen

$$e^{(\Re(\varrho_1)-\varepsilon)x} < |\varphi_1| < e^{(\Re(\varrho_1)+\varepsilon)x},$$

$$e^{(\Re(\varrho_2)-\varepsilon)x} < |\varphi_2| < e^{(\Re(\varrho_2)+\varepsilon)x},$$

woraus die Behauptung folgt, da nach Bemerkung 1 $\varphi_1 \neq 0$ ist.

Bemerkung 3. *Unter denselben Voraussetzungen für φ_1 und φ_2 gilt: Für jeden Wert der Konstanten c gehört $\varphi_1 + c\varphi_2$ zur Zahl ϱ_1.*

Beweis.

$$\varphi_1 + c\varphi_2 = \varphi_1\left(1 + c\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = \varphi_1\cdot\varphi_3,$$

$$\varphi_3' = c\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1} - \frac{\varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2}\right) = c\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_2} - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right) \to 0,$$

also

$$\frac{\varphi_3'}{\varphi_3} \to 0, \qquad \frac{(\varphi_1\varphi_3)'}{\varphi_1\varphi_3} = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \frac{\varphi_3'}{\varphi_3} \to \varrho_1.$$

Gehören φ_1 und φ_2 zu ϱ_1 und ϱ_2 für $x = -\infty$, so gelten dieselben Behauptungen, wenn $\Re(\varrho_1) < \Re(\varrho_2)$ ist.

Im folgenden wird oft von einem Satze Gebrauch gemacht, den Herr Perron in Bd. 142 von Crelles Journal bewiesen hat und der so lautet:

Es seien in der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0$$

die a_ν für $x > x_0$ stetige Funktionen der reellen Variablen x, die für $x = +\infty$ den Grenzwerten $\bar{a}_\nu$ zustreben mögen. Hat dann die charakteristische Gleichung

$$\chi(\varrho) = \varrho^n + \bar{a}_1\varrho^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0$$

lauter Wurzeln mit voneinander verschiedenen Realteilen, so gibt es für $x > x_0$ ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von Lösungen, das den Gleichungen genügt

$$\lim_{x=+\infty}\frac{y_\nu'(x)}{y_\nu(x)} = \varrho_\nu; \qquad \lim_{x=+\infty}\frac{y_\nu^{(\varkappa)}(x)}{y_\nu} = \varrho_\nu^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Die a_ν und also auch die y_ν können dabei komplexe Funktionen sein.

Der Satz gilt auch unter entsprechenden Voraussetzungen für jeden ins Unendliche gehenden Strahlenweg $x = a_0 + re^{i\vartheta_0}$. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Differentialgleichung auf die Veränderliche r zu transformieren. Haben die a_ν auf dem Strahlenwege wieder dieselben Grenzwerte $\bar{a}_\nu$, so ergibt sich $\varphi(\varrho e^{i\vartheta_0})$ als charakteristische Gleichung, also ist

$$\frac{dy_\nu}{dr} : y_\nu \to \varrho_\nu e^{i\vartheta_0}$$

oder

$$\frac{dy_\nu}{dx} : y_\nu \to \varrho_\nu ,$$

wie vorher. Mit Hilfe des Perronschen Satzes läßt sich nun ein Satz über inhomogene Differentialgleichungen beweisen, der es gestattet, das Verhalten der Lösungen dieser Gleichung für große Werte der Veränderlichen mit aller nur wünschenswerten Genauigkeit zu erkennen.

Satz. *Ist*

$$v^{(n)}(x) + \varphi_1 v^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n v(x) = D(v)$$

ein Differentialausdruck, in dem die φ_ν für alle reellen x stetige und differenzierbare Funktionen sind, welche den Gleichungen

$$\lim_{|x|=\infty} \varphi_\nu = a_\nu , \qquad \lim_{|x|=\infty} \varphi_\nu' = 0 \tag{19a}$$

genügen, und hat die charakteristische Gleichung

$$\psi(\varrho) = \varrho^{(n)} + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

lauter Wurzeln mit verschiedenen Realteilen

$$\Re(\varrho_1) > \ldots > \Re(\varrho_n) ,$$

so hat die inhomogene Gleichung

$$D(w) = G(x) ,$$

wo $G(x)$ eine für alle x stetige differenzierbare Funktion mit der charakteristischen Zahl σ für $|x| = \infty$ ist ($\Re(\sigma) \neq \Re(\varrho_\nu)$), wenigstens eine mit ihren $(n+1)$ ersten Ableitungen für alle x stetige Lösung w_1, für welche

$$\lim_{x=+\infty} \frac{w_1^{(k)}}{w_1} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

ebenso eine mit ihren $n+1$ ersten Ableitungen für alle x stetige Lösung w_2, für welche

$$\lim_{x=-\infty} \frac{w_2^{(k)}}{w_2} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Der Beweis wird für $n = 2$ geführt, da seine Allgemeingültigkeit ohne weiteres erkennbar ist. Es ist

$$G(x) = e^{\sigma x} g(x) \cdot \frac{G'}{G} = \frac{g'}{g} + \sigma ,$$

also

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{g'}{g} = 0 \qquad (g \neq 0 \text{ für große } x)$$

Ferner hat man

$$D(v) = v'' + \varphi_1 v' + \varphi_2 v = e^{\sigma x} g , \qquad E(v) = \frac{D(v)}{g} = e^{\sigma x} ,$$

h.

$$\frac{d}{dx}(E(v)) - \sigma E(v) = \frac{v'''}{g} + v''\left(\frac{\varphi_1}{g} - \frac{g'}{g^2} - \frac{\sigma}{g}\right) + v'\left(\frac{\varphi_2}{g} + \frac{\varphi_1'}{g} - \frac{\varphi_1 g'}{g^2} - \sigma\frac{\varphi_1}{g}\right)$$
$$+ v\left(\frac{\varphi_2'}{g} - \varphi_2\frac{g'}{g^2} - \sigma\frac{\varphi_2}{g}\right) = 0$$

der

$$F(v) = v''' + v''\left(\varphi_1 - \sigma - \frac{g'}{g}\right) + v'\left(\varphi_2 - \sigma\varphi_1 + \varphi_1' - \varphi_1\frac{g'}{g}\right)$$
$$+ v\left(\varphi_2' - \sigma\varphi_2 - \varphi_2\frac{g'}{g}\right) = 0.$$

ie charakteristische Gleichung ist wegen (19a)

$$\varrho^3 + \varrho^2(a_1 - \sigma) + \varrho(a_2 - \sigma a_1) - \sigma a_2 = (\varrho - \sigma)(\varrho^2 + a_1\varrho + a_2) = 0.$$

Wegen $\Re(\sigma) + \Re(\varrho_\nu)$ gibt es nach Perron ein Integral w_1, das für $= +\infty$ die charakteristische Zahl σ hat:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{w_1^{(\varkappa)}}{w_1} = \sigma^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

ann kann aber wegen $\Re(\sigma) + \Re(\varrho_\nu)$ nicht $D(w_1) = 0$ sein. Daher ist egen

$$F(w_1) = g\left(\frac{d}{dx}(E) - \sigma E\right) \neq 0$$

ei Festlegung der willkürlichen Konstanten in w_1

$$E(w_1) = e^{\sigma x}.$$

ithin

$$D(w_1) = e^{\sigma x} g = G.$$

Das Verhalten von w_1 für große positive x ist nun leicht zu ersehen. s ist

$$w_1\left(\frac{w_1''}{w} + \varphi_1\frac{w_1'}{w_1} + \varphi_2\right) = G; \qquad w_1 = \frac{G(x)}{\psi(\sigma) + \delta(x)},$$

obei $\lim_{x=+\infty} \delta(x) = 0$ ist. Entsprechendes gilt bei $x = -\infty$ für eine ösung w_2.

Es ist späterhin von Wichtigkeit, das Verhalten der Integrale bei nnäherung in beiden Richtungen zu kennen. Gemäß Elementarsätzen er lineare Differentialgleichungen sind ja die Integrale für alle x stetig. i zunächst

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \Re(\sigma).$$

des Integral läßt sich in der Form darstellen

$$w = w_2 + c_1 v_1 + c_2 v_2.$$

Dabei bedeuten v_1 und v_2 solche Fundamentalintegrale der homogenen Gleichung, die nach dem Perronschen Satze für $x = -\infty$ zu ϱ_1 und ϱ_2 gehören. Nach Bemerkung 3 folgt dann, daß jedes Integral w für $x = -\infty$ die charakteristische Zahl σ hat, insbesondere auch w_1. Andererseits ist w_1 das einzige Integral, das für $x = +\infty$ zu σ gehört. Für beide Annäherungen gehört also w_1 zur Zahl σ und es ist das einzige Integral dieser Art. Im Falle

$$\Re(\sigma) > \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2)$$

gilt Entsprechendes für w_2.

Das Integral w_2 ist jetzt das einzige mit der Eigenschaft

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{w_2'}{w_2} = \sigma.$$

Ist dagegen $\Re(\varrho_2) < \Re(\sigma) < \Re(\varrho_1)$, so können verschiedene Fälle eintreten. Aus dem Perronschen Satz und der Bemerkung 3 folgt leicht, daß es bis auf einen konstanten Faktor nur ein einziges Integral v_2 der homogenen Gleichung gibt, das für $x = +\infty$ zu ϱ_2 gehört, alle übrigen gehören für $x = +\infty$ zu ϱ_1. Ebenso gibt es nur ein einziges Integral v_1, das für $x = -\infty$ zu ϱ_1 gehört, alle anderen gehören zu ϱ_2. Wir schließen nun zunächst den Fall aus, daß v_1 und v_2 sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann bilden also v_1 und v_2 ein Fundamentalsystem und es gehört v_1 sowohl bei positivem wie negativem wachsenden x zu ϱ_1, v_2 zu ϱ_2.

Ist nun w_1 dasjenige Integral der inhomogenen Gleichung, das für $x = +\infty$ zu σ gehört, dann erhält man wegen

$$\Re(\varrho_2) < \Re(\sigma) < \Re(\varrho_1)$$

alle Integrale dieser Eigenschaft durch die Formel

$$\bar{w}_1 = w_1 + d_2 v_2.$$

Ist w_2 dasjenige Integral, das für $x = -\infty$ zu σ gehört, so erhält man alle Integrale dieser Eigenschaft durch die Formel

$$\bar{w}_2 = w_2 + d_1 v_1.$$

Ist nun etwa

$$w_1 - w_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2,$$

so braucht man nur

$$d_1 = c_1 \quad \text{und} \quad d_2 = -c_2$$

zu wählen, um $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ zu erzielen. Für diese Lösung w gilt alsdann

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{w^{(k)}}{w} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

ffenbar ist sie die einzige dieser Art. Tritt dagegen der Ausnahmefall n, daß sich die oben definierten Integrale v_1 und v_2 nur um einen konanten Faktor unterscheiden, so gibt es kein Integral w, das bei beiden nnäherungen zu σ gehört.

Bemerkung 4. *Ist bei reellen x*

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a \qquad (\Re(a) \neq 0, \text{ etwa } > 0),$$

gilt auch

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\varphi(x)}{\int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a.$$

Beweis. Die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{\varphi'}{\varphi} y' = 0$$

at die beiden Integrale $y_1 = 1$ und $y_2 = \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx$. Also gibt es nach erron ein Integral

$$y = c_1 + c_2 \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx,$$

r das

$$\lim_{x=-\infty} \frac{y'}{y} = \lim_{x=-\infty} \frac{c_2 \varphi}{c_1 + c_2 \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a \qquad (c_2 \neq 0).$$

ffenbar muß $c_1 = 0$ sein. Ebenso gibt es ein zweites Integral, für das

$$\lim_{x=+\infty} \frac{c_2' \varphi}{c_1' + c_2' \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a \qquad (c_2' \neq 0).$$

ann gilt diese Beziehung aber für jedes c_1', also auch für $c_1' = 0$.

Die Form

$$(x^2 + a_1' x + a_0') y'(x) + (b_2' x^2 + b_1' x + b_0') y(x+h)$$

a_ν', b_ν', h reell) läßt sich durch lineare reelle Transformationen in die Gealt setzen

$$\begin{aligned} (y) &= (x^2 + a_0) y'(x) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) y(x+1) \\ &= x^2 (y'(x) + b_2 y(x+1)) + x b_1 y(x+1) + a_0 y'(x) + b_0 y(x+1) \\ &= x^2 L_2(y) + x L_1(y) + L_0(y). \end{aligned}$$

ie früher werde gesetzt

$$L_\nu(e^{zx}) = e^{zx} l_\nu(z) \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

$$l_2(z) = z + b_2 e^z; \quad l_1(z) = b_1 e^z; \quad l_0(z) = a_0 z + b_0 e^z.$$

Ist wieder wie früher

$$y = \int_C e^{zx}\, v(z)\, dz$$

(C ein noch zu bestimmender Integrationsweg), dann ergibt sich

$$x^2 L_2(y) = \int_C x^2 e^{zx} l_2 v\, dz = [x e^{zx} l_2 v]_C - [e^{zx}(l_2 v)']_C + \int_C e^{zx}(l_2 v)''\, dz,$$

$$x L_1(y) = \int_C x e^{zx} l_1 v\, dz = [e^{zx} l_1 v]_C - \int_C e^{zx}(l_1 v)'\, dz.$$

Mithin ist

$$(21) \qquad A(y) = [x e^{zx} l_2 v]_C - [e^{zx}(l_2 v)']_C + [e^{zx} l_1 v)_C + \int_C e^{zx}[l_2 v'' + (2 l_2' - l_1) v' + (l_2'' - l_1' + l_0) v]\, dz.$$

Jede Lösung v der Differentialgleichung

$$A_z(v) = l_2(z) v''(z) + (2 l_2'(z) - l_1(z)) v'(z) + (l_2''(z) - l_1'(z) + l_0(z)) v(z) =$$

heißt eine Laplacesche Transformierte. Singuläre Stellen können für diese Lösungen nur die Nullstellen von $l_2(z)$ sein. Über ihre Lage gilt das schon früher Gesagte. Rein imaginäre Nullstellen sollen nicht vorhanden sein. Der Streifen $-\gamma_0 \leqq \Re(z) \leqq +\gamma_0$ sei nullstellenfrei. Sind $z = \gamma + iu$ und $z = -\gamma + iu$ zwei Gerade im Streifen, dann gibt es für $a_0 > 0$ auf jeder Geraden ein Fundamentalsystem $\overset{1}{v}_\gamma$, $\overset{2}{v}_\gamma$ bzw. $\overset{1}{v}_{-\gamma}$, $\overset{2}{v}_{-\gamma}$ für das

$$\lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{v}_{\pm\gamma})}{\overset{1}{v}_{+\gamma}} = \varrho_1; \qquad \lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{2}{v}_{+\gamma})}{\overset{2}{v}_{+\gamma}} = \varrho_2$$

gilt, ϱ_1 und ϱ_2 sind dabei die Wurzeln der im Streifen zu $A_z(v)$ gehörigen charakteristischen Gleichung $(\varrho^2 + a_0) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) = 0$. Der Perronsche Satz liefert aber keine Aussage über den Zusammenhang der Fundamentalsysteme von verschiedenen Geraden, insbesondere entscheidet er nicht die Frage, ob es ein Fundamentalsystem $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$ gibt, das für $u = +\infty$ auf jeder Geraden des Streifens zu ϱ_1 bzw. zu ϱ_2 gehört. Auch sind die Bedingungen für den Perronschen Satz nicht erfüllt für $a_0 \leqq 0$. Zur Beseitigung dieser Mängel stellen wir eine Untersuchung an, die uns gestattet, für eine gewisse Teilumgebung des Punktes $z = \infty$ ein Fundamentalsystem aufzustellen und sein Verhalten genau zu studieren. Diese Methode erscheint eng an die spezielle Gestalt unseres Beispiels gebunden, trägt jedoch einen viel allgemeineren Charakter. Immerhin sei schon jetzt darauf verwiesen, daß wir allgemeinsten Falle und bei beliebigem Grad der Koeffizienten in $A(y)$ auf einem anderen immer gangbaren Wege zu völlig hinreichenden Resultaten gelangen. Es ist

$$z^{-1} A_z(v) = v'' + 2 z^{-1} v' + a_0 v + z^{-1} e^z [b_2 v'' + (2 b_2 - b_1) v' + (b_2 - b_1 + b_0$$

Ist ϱ eine der Wurzeln von $\varrho^2 + a_0 = 0$, so geht dieser Ausdruck durch ie Transformation

$$v = z^{-1} e^{\varrho z} \bar{v}$$

n den folgenden über:

$$^{-1} e^{\varrho z} [\bar{v}'' + 2\varrho \bar{v}' + z^{-1} e^z \{b_2 \bar{v}'' + \bar{v}'(c_0 + c_1 z^{-1}) + \bar{v}(d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2})\}],$$

obei die Konstanten c und d folgendermaßen bestimmt sind:

$$= 2b_2 - b_1 + 2b_2\varrho; \quad c_1 = -2b_2; \quad d_0 = \varrho^2 b_2 + \varrho(2b_2 - b_1) + b_2 - b_1 + b_0;$$
$$d_1 = -c_0; \quad d_2 = -c_1.$$

s ist also

$$z^{-1} A_z(v) = z^{-1} e^{\varrho z}(E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E_2(\bar{v})).$$

$_1$ und E_2 sind dabei die folgenden Differentialausdrücke:

$$22) \quad \begin{cases} E_1(\bar{v}) = \bar{v}''(z) + 2\varrho \bar{v}'(z), \\ E_2(\bar{v}) = b_2 \bar{v}''(z) + (c_0 + c_1 z^{-1}) \bar{v}'(z) + (d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}) \bar{v}(z). \end{cases}$$

Um also eine Lösung von $A(v) = 0$ zu finden, kann man auch ein olche von

$$E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E(\bar{v})$$

uchen. Wir setzen nun formal an

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z),$$

obei die χ_n dem System von Rekursionsdifferentialgleichungen

$$E_1(\chi_n - z^{-1} e^z E_2(\chi_{n-1}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

enügen und $\chi_0 = 1$ gesetzt ist. Dann ist offenbar, wenn zunächst die onvergenz und gliedweise Differenzierbarkeit der Reihe vorausgesetzt wird, eine Lösung unserer Gleichung. χ_n bestimme sich aus χ_{n-1} durch die ormel

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-2\varrho\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{2\varrho\zeta} \zeta^{-1} e^{\zeta} E_2(\chi_{n-1}(\zeta)) d\zeta d\lambda.$$

Das rechts stehende Symbol hat zunächst noch keinen Sinn. Die ariable z beschränke sich im folgenden auf ein Gebiet G, das durch die ngleichungen bestimmt ist

$$\Re(z) \leqq \gamma_0; \qquad |z| > |b_2|^{-1} e^{\gamma_0}; \qquad |z| > r,$$

obei r so groß gewählt sein soll, daß für alle z von G, die im Streifen $\leqq \Re(z) \leqq \gamma_0$ liegen, $|J(z)| > 1$ ist.

Das Nichtverschwinden von b_2 ist in der Voraussetzung enthalten, ß $l_2(z) = z + b_2 e^z$ keine rein imaginären Nullstellen haben soll. Durch e zweite und erste Bedingung ist in G die Ungleichung gesichert

$$|z^{-1} e^z| < |b_2|.$$

Die von den Nullstellen von $l_2(z)$ ausgehenden, nach dem Unendlichen führenden Verzweigungsschnitte sollen nicht durch G ins Unendliche führen, eine wohlerlaubte Annahme.

Wir behaupten nun:

Stellt das Integral $\chi_{n-1}(z)$ eine in G reguläre analytische Funktion, die dort den Ungleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} |\chi_{n-1}(z)| \leqq K|z^{-1}e^z|^{n-1}; & |\chi'_{n-1}(z)| \leqq (n-1)K|z^{-1}e^z|^{n-1}; \\ & |\chi''_{n-1}(z)| \leqq (n-1)^2 K|z^{-1}e^z|^{n-1} \end{cases}$$

genügt, so stellt auch χ_n eine in G reguläre analytische Funktion dar, die dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < c'K|z^{-1}e^z|^n;\ |\chi'_n(z)| < nc'K|z^{-1}e^z|^n;\ |\chi''_n(z)| < n^2c'K|z^{-1}e^z|^n$$

genügt, wobei c' eine von n unabhängige numerische Konstante bedeutet.

Beweis. Zunächst folgt

$$|E_2(\chi_{n-1})| \leqq (n-1)^2 cK|z^{-1}e^z|^{n-1};$$

wobei $\frac{c}{3}$ als das Maximum von $|b_2|$, $|c_0 + c_1 z^{-1}|$, $|d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}$ im Gebiete G definiert ist. Also auch

$$(24)\qquad |E_2(\chi_{n-1})| < n^2 cK|z^{-1}e^z|^{n-1}.$$

Die Herleitung dieser Ungleichung gilt zunächst nur für $n > 1$, jedoch ist die letzte Ungleichung auch für $n = 1$ richtig, da $\chi_0 \equiv 1$ ist. Wir setzen nun

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} e^{2\varrho\zeta}\,\zeta^{-1}e^{\zeta}\,E_2(\chi_{n-1}(\zeta))\,d\zeta,$$

wobei der Integrationsweg von λ aus möglichst bequem innerhalb G zur reellen Achse und auf dieser ins Unendliche führen soll. Durch diese Andeutung des Weges ist $\varphi(\lambda)$ eindeutig bestimmt. Denn der Integrand ist eine in G reguläre analytische Funktion und das Integral ist wegen (24) absolut konvergent, da zunächst $a_0 > 0$, d. h. ϱ rein imaginär angenommen wird. Wegen (24) kann die Integration statt auf der reellen Achse auch auf irgendeinem Horizontalstrahl erfolgen, insbesondere auch auf dem von $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ ausgehenden. Es ist also auch

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty+i\lambda''}^{\lambda'+i\lambda''} e^{2\varrho\zeta}\,\zeta^{-1}e^{\zeta}\,E_2(\chi_{n-1})\,d\zeta,$$

oder für $\zeta = \zeta' + i\lambda''$

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{2\varrho i\lambda''}\,e^{2\varrho\zeta'}\,\zeta^{-1}e^{\zeta}\,E_2(\chi_{n-1}(\zeta))\,d\zeta'.$$

egen (24) ist daher, da ϱ rein imaginär sein soll,

$$|\varphi(\lambda)| \leqq n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} \int_{-\infty}^{\lambda'} (\zeta'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}} e^{n\zeta'} d\zeta'.$$

t zunächst $\Re(z) \leqq 0$, so folgt daraus

$$|\varphi(\lambda)| \leqq n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} (\lambda'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{n\zeta'} d\zeta = n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} |\lambda|^{-n} \frac{e^{n\lambda'}}{n}.$$

aher ist

$$|\chi_n'(\lambda)| = |e^{-2\varrho\lambda} \varphi(\lambda)| < n c K |\lambda^{-1} e^{\lambda}|^n. \tag{25}$$

t für

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} \chi_n'(\lambda) d\lambda$$

er Integrationsweg ebenso wie bei $\varphi(\lambda)$ definiert, so läßt sich wegen 25) und der Regularität von $\chi_n'(\lambda)$ entlang irgendeiner Horizontalen tegrieren, also auch auf der durch $z = z' + iz''$ gehenden:

$$|\chi_n(z)| = \Big|\int_{-\infty + iz''}^{z' + iz''} \chi_n'(\lambda) d\lambda\Big| < \int_{-\infty}^{z'} n c K (\lambda'^2 + z''^2)^{-\frac{n}{2}} e^{n\lambda'} d\lambda'.$$

Für $\Re(z) \leqq 0$ ist also

$$|\chi_n(z)| < n c K (z'^2 + z''^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{z'} e^{n\lambda'} d\lambda' = c K |z^{-1} e^z|^n.$$

Aus (22), (24), (25) folgt

$$|\chi_n''(z)| < 2|\varrho|\,|\chi_n'(z)| + |z^{-1} e^z E_2(\chi_{n-1}(z))| < 2|\varrho| n c K |z^{-1} e^z|^n + n^2 c K |z^{-1} e^z|^n = n^2 \left(1 + \frac{2|\varrho|}{n}\right) c K |z^{-1} e^z|^n,$$

Setzen wir $c' = c(1 + 2|\varrho|)$, so ist unsere Behauptung für das Teilbiet $\Re(z) \leqq 0$ von G bewiesen. Für $\Re(z) > 0$ machen wir von der oraussetzung Gebrauch, daß dann in G $|\Im(z)| > 1$ ist. Dann hat

$$f(\zeta') = e^{\frac{n}{2}\zeta'} (\zeta'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}}$$

ne stets positive Ableitung und es ist daher

$$|\varphi(\lambda)| < n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} |\lambda|^{-n} e^{\frac{n}{2}\lambda'} \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{\frac{n}{2}\zeta'} d\zeta'.$$

Wie man sieht, ergeben sich dieselben Ungleichungen für $\chi_n(z)$, $\chi_n'(z)$, $''(z)$, nur daß $c' = 4c(1 + 2|\varrho|)$ gesetzt werden muß. Unsere Behauptung damit bewiesen. Da $\chi_0 \equiv 1$ einen Sinn hat, in G regulär ist und den ngleichungen (23) mit $K = 1$ genügt, so haben alle $\chi_n(z)$ einen Sinn, nd in G regulär und genügen dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < c'^n |z^{-1} e^z|^n; \quad |\chi_n'(z)| < n c'^n |z^{-1} e^z|^n; \quad |\chi_n''(z)| < n^2 c'^n |z^{-1} e^z|^n.$$

Ist G' das Teilgebiet von G, in welchem

$$|z| > e^{\gamma_0} c'$$

ist und also die Ungleichung $|z^{-1} e^z| < \frac{1}{c'}$ gesichert ist, so ist

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z)$$

in G' absolut und gleichmäßig konvergent und stellt in dieser Teilumgebung des Punktes $z = \infty$ eine Lösung von

$$E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E_2(\bar{v}) = 0$$

dar. Der Beweis gilt zunächst nur für rein imaginäres ϱ, nämlich $a_0 > 0$. Ist nun $a_0 < 0$, also ϱ reell, so ändert sich bei positivem ϱ nichts Wesentliches an dem Beweise. Auch für $\varrho < 0$ ließe sich Näheres über die Reihe aussagen. Doch wollen wir diese langwierigen Betrachtungen fortlassen, weil wir sie nicht benötigen. Wir können also sagen:

Ist $a_0 < 0$, so gibt es ein Integral v_1 der Differentialgleichung $A(v) = 0$, nämlich

$$v_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z} \bar{v}_1 = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z), \tag{26}$$

das in G' der Ungleichung

$$|v_1(z)| < C |z|^{-1}$$

genügt. Für $a_0 > 0$ gibt es in G' ein Fundamentalsystem von $A(v) = 0$, nämlich

$$\begin{cases} v_1(z) = z^{-1} e^{\varrho_1 z}\, \bar{v}_1(z) = z^{-1} e^{\varrho_1 z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z, \varrho_1), \\ v_2(z) = z^{-1} e^{\varrho_2 z}\, \bar{v}_2(z) = z^{-1} e^{\varrho_2 z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z, \varrho_2). \end{cases} \tag{27}$$

Es gilt für jeden Weg in G'

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{v_1'}{v_1} = \varrho_1; \quad \lim_{|z|=\infty} \frac{v_2'}{v_2} = \varrho_2,$$

$$\varrho_1 = i\sqrt{a_0}; \quad \varrho_2 = -i\sqrt{a_0}.$$

Wir behandeln zunächst diesen letzten Fall: $a_0 > 0$. Die Variable z verbleibe jetzt in dem singularitätenfreien Streifen $-\gamma_0 \leqq \Re(z) \leqq +\gamma_0$. Lassen wir nun $v_1(z)$ und $v_2(z)$ auf der imaginären Achse von $+i\infty$ nach $-i\infty$ wandern, oder anders gesprochen, setzen wir $v_1(z)$ und $v_2(z)$ innerhalb des Streifens von $+i\infty$ her analytisch fort — daß das möglich

t, wissen wir —, so wird dieses Fundamentalsystem in ein anderes über-
hen. Es wird für große negative Werte des Streifens sein

$$\overset{*}{v}_1(z) = c_{1,1}\, v_1(z) + c_{1,2}\, v_2(z); \qquad \overset{*}{v}_2(z) = c_{2,1}\, v_1(z) + c_{2,2}\, v_2(z),$$

obei der Stern die Erinnerung an die analytische Fortsetzung wachhalten
ll, während $v_1(z)$ und $v_2(z)$ rechts die in G' definierten Funktionen be-
euten. Ist nun $c_{1,1} \neq 0$, so wird das für große positive Werte $\Im(z)$ im
reifen durch die Gleichung

$$v_{II}(z) = n_1 v_1(z) + n_2 v_2(z)$$

efinierte Integral in

$$(n_1 c_{1,1} + n_2 c_{2,1})\, v_1(z) + (n_1 c_{1,2} + n_2 c_{2,2})\, v_2(z)$$

ergehen und $n_2 \neq 0$ und n_1 sind so wählbar, daß

$$n_1 c_{11} + n_2 c_{2,1} = 0$$

ird. $v_{II}(z)$ ist dabei innerhalb des Streifens eindeutig und regulär und
gilt bei beiderseitigem Übergang ins Unendliche innerhalb des Streifens

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_{II}(z))}{v_{II}(z)} = \varrho_2 .$$

Wird nun $v_I(z)$ für große positive Werte $\Im(z)$ im Streifen durch die
leichung

$$v_I(z) = v_1(z)$$

finiert, so gilt wegen $c_{1,1} \neq 0$ dann von selbst innerhalb des Streifens

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_1 .$$

t dagegen $c_{1,1} = 0$, so tritt ein *Ausnahmefall* ein. Ein Fundamental-
stem $v_I(z)$, $v_{II}(z)$ dieser Art existiert nicht. Vielmehr gilt im Streifen

$$8) \qquad \lim_{J(z)=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_1, \qquad \lim_{J(z)=-\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_2 .$$

(z) verschwindet beiderseits im Unendlichen sehr stark. Diesen Aus-
hmefall wollen wir zunächst ausschließen. Dann gilt für alle $z = z' + iu$
s Streifens

$$|v_I(z)| < e^{-u\sqrt{a_0}}\, |z + s|^{-1} \cdot \text{konst.},$$
$$|v_{II}(z)| < e^{u\sqrt{a_0}}\, |z + s|^{-1} \cdot \text{konst.}$$

ie Konstanten sind dabei unabhängig von z' wählbar, $s > \gamma_0 > 0$.

Die Lösung unserer Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

führt auf ein eingehenderes Studium der inhomogenen Differentialgleichung

$$A_z(w_{(z)}) = e^{-zt}(z+s)^{-2}.$$

t bedeutet wie früher einen reellen Parameter. z laufe auf der Vertikalen $\gamma + iu$ $(0 < \gamma < \gamma_0)$.

Die Bedingungen für unseren Satz über inhomogene Differentialgleichungen sind erfüllt. Da außerdem der Ausnahmefall, daß $v_l(z)$ beiderseits im Unendlichen stark verschwindet, zunächst ausgeschlossen bleibt, so können wir sagen:

Es gibt eine und nur eine Lösung $w_\gamma(z)$, so daß für $z = \gamma + iu$ gilt

$$\lim_{|u|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(w_\gamma(z))}{w_\gamma(z)} = -t.$$

Das Verhalten von $w_\gamma(z)$ für große $|z|$ läßt sich nach (20) sofort angeben:

$$(29) \qquad w_\gamma(z,t) = \frac{e^{-zt}(z+s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 + a_0 + \delta(z,t)}, \quad \text{wobei} \quad \lim_{|u|=\infty} \delta(z,t) = 0.$$

Entsprechend gibt es auf der Vertikalen $z = -\gamma + iu$ eine und nur eine Lösung $w_{-\gamma}(z)$, für die eine ganz entsprechende Abschätzung gilt. Das Integral

$$U_{\pm\gamma}(x,t) = \int_{\pm\gamma - i\infty}^{+\gamma+i\infty} e^{zx} w_{\pm\gamma}(z,t)\,dz$$

hat daher einen Sinn und kann einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden. $A(U_\gamma(x))$ hat also auch einen Sinn. Nach (21) ist

$$A(U_\gamma(x)) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} A_z(w_\gamma(z))\,dz = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z(x-t)}(z+s)^{-2}\,dz$$

$$= \varepsilon\, 2\pi i\, e^{-s(x-t)}(x-t); \qquad \begin{matrix} \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \geqq 0, \\ \varepsilon = 0 \text{ für } x - t < 0. \end{matrix}$$

Definieren wir

$$W(x) = \int_{-\infty}^{0} U_{-\gamma}(x,t)\, A_{2,t}(g(t))\,dt + \int_0^{\infty} U_\gamma(x,t)\, A_{2,t}(g(t))\,dt$$

und nehmen wir als bewiesen an, daß alle Integrale nach t konvergent sind und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann, so ist

$$A(W) = \int_{-\infty}^{0} A(U_{-\gamma}(x,t))\, A_{2,t}(g(t))\,dt + \int_0^{\infty} A(U_\gamma(x,t))\, A_{2,t}(g(t))\,dt$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{x} A_{2,t}(g(t))\, e^{-s(x-t)}(x-t)\,dt.$$

araus folgt gemäß Satz I, S. 46 ganz wie früher

$$\text{0)} \qquad \Lambda\left(\frac{1}{2\pi i} W\right) = g(x).$$

m die Konvergenz der Integrale über dt nachzuweisen, müssen wir noch as Verhalten von $w_{\pm\gamma}(z,t)$ für große t untersuchen. Dazu schreiben ir die Funktion explizit hin. Wir behaupten

$$= v_I(z)\int_{\gamma-i\infty}^{z} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'(\sigma)-l_1(\sigma)}{l_2(\sigma)}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda)\cdot e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'(\sigma)-l_1(\sigma)}{l_2(\sigma)}d\sigma}\cdot e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2}l_2^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta.$$

m die Vorstellungen zu fixieren, seien $\pm\gamma+iu$ so aus der kontinuierchen Menge wählbarer Geraden gesucht, daß auf ihnen keine der höchstens bzählbaren (in Wahrheit nur endlich vielen) Nullstellen von $v_I(z)$ liegen. aß die rechte Seite — falls die Integrale konvergieren — eine Lösung er inhomogenen Gleichung darstellt, ist bekannt. Die Konvergenz der ntegrale und die Identität mit w_γ ergibt sich aus Bemerkung 4: Unter enutzung der Identität

$$\frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

eht man, daß die Funktion

$$\text{1)} \qquad f_1(\lambda) = v_I(\lambda)\,e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\,e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2}l_2^{-1}(\lambda)$$

if der Vertikalen $\lambda=\gamma+i\lambda''$ für $\lambda''=\pm\infty$ zur Zahl $i\sqrt{a_0}-t$ gehört. lso hat nach Bemerkung 4

$$f_2(\zeta) = \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} f_1(\lambda)\,d\lambda$$

if der Geraden $\zeta=\gamma+i\zeta''$ für $\zeta''=\pm\infty$ dieselbe charakteristische Zahl. ie Funktion

$$f_3(\zeta) = e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\,v_I^{-2}(\zeta)\,f_2(\zeta)$$

ehört daher für $\zeta''=\pm\infty$ zur Zahl $-i\sqrt{a_0}-t$. Daher gehört die echte Seite

$$v_I(z)\int_{\gamma-i\infty}^{z} f_3(\zeta)\,d\zeta$$

ir $u=\pm\infty$ zur Zahl $-t$ und ist also wegen der eindeutigen Bestimmteit einer solchen Lösung mit w_γ identisch. Nun können wir w_γ auch für roße t untersuchen. Aus der Darstellung (27) wissen wir, daß

$$\text{2)} \qquad v_I(\gamma+iu) = e^{-u\sqrt{a_0}}\,|\gamma+iu|^{-1}\cdot\varphi(u),$$

wobei

$$\lim_{|u|=\infty} \varphi(u) = 1.$$

Da ferner auf $z = \gamma + iu$ die Funktion $v_I(z)$ keine Nullstellen hat, so ist

$$(33) \qquad v_I^{-1}(\gamma + iu) = e^{u\sqrt{a_0}} |\gamma + iu| \frac{1}{\varphi(u)} < C_\gamma e^{u\sqrt{a_0}} |\gamma + iu|.$$

Also ist auf $z = \gamma + iu$

$$|w_\gamma(z,t)| < C_\gamma \cdot e^{-\gamma t} e^{-u\sqrt{a_0}} |z|^{-1} \int_{-\infty}^{u} e^{2\zeta''\sqrt{a_0}} \int_{+\infty}^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1} d\lambda'' d\zeta''.$$

Bei genügend großem s hat

$$\varphi_1(\lambda'') = e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1}$$

eine stets negative Ableitung. Also ist

$$\varphi_2(\zeta'') = \int_{\infty}^{\zeta''} \varphi_1(\lambda'') e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} d\lambda'' \leqq \varphi_1(\zeta'') \int_{\infty}^{\zeta''} e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} d\lambda''.$$

Ebenso hat

$$e^{\frac{\zeta''}{2}\sqrt{a_0}} (\zeta''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1}$$

eine stets positive Ableitung. Ganz ebenso ergibt sich daher schließlich für $z = \gamma + iu$

$$(33a) \qquad |w_\gamma(z,t)| < C_\gamma \cdot e^{-\gamma t} (u^2 + (\gamma+s)^2)^{-\frac{1}{4}}$$

und entsprechend für $w_{-\gamma}(z,t)$. Daraus folgt gemäß Definition

$$(34) \qquad |U_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}$$

und auch

$$\left| \frac{d}{dx} U_\gamma(x,t) \right| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}.$$

Die Funktion $W(x)$ hat also einen Sinn und kann unter dem Integralzeichen einmal nach x differenziert werden. Die zur Gleichung (30) führenden Operationen sind damit gerechtfertigt. Es bleibt noch zu zeigen, daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist. Behauptet wird

$$W(x) = O(|x|^{a-2}); \qquad W'(x) = O(|x|^{a-2}).$$

Dazu ist es nötig, die Identität der beiden Lösungen $w_\gamma(z,t)$ und $w_{-\gamma}(z,t)$ nachzuweisen, die ja als reguläre analytische Funktionen im Streifen eindeutig definiert sind. Zunächst kann man in

$$f_2(\zeta) = \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} f_1(\lambda)\, d\lambda$$

die Integration auch auf der Vertikalen $-\gamma + i\lambda''$ ins Unendliche erstrecken. Die Funktion $f_1(\lambda)$ ist ja im Streifen regulär. Wegen (31)

d (27) sind auch die weiteren Bedingungen für die Verschiebung der tegrationslinie erfüllt. Es ist ferner

$$|f_3(\zeta)| = \Big|\int_{i\infty}^{0} f_1(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{\zeta} f_1(\lambda)\,d\lambda\Big| < \text{konst.} + |\zeta|\cdot|f_1(\zeta)|.$$

Es folgt weiter aus der Darstellung (27), daß für große $|\zeta| = |\zeta' + i\zeta''|$ s Streifens

$$|v_I^{-1}(\zeta)| < \text{konst.}\, e^{\zeta''\sqrt{a_0}}\,|\zeta|, \tag{5}$$

obei die Konstante *von* ζ' *unabhängig* ist. Daher läßt sich auch in

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f_3(\zeta)\,d\zeta$$

e Verschiebung der Integrationslinien vornehmen, wenn man noch zeigt, ß in den im Streifen möglicherweise vorhandenen, aber wegen (27) nur dlich vielen Nullstellen von $v_I(z)$ das Residuum von $f_3(\zeta)$ Null sein uß. Nun ist aber gemäß Elementarsätzen über lineare Differential- eichungen $w_\gamma(z)$ eine im ganzen Streifen reguläre analytische Funktion.

Wäre an einer Nullstelle von $v_I(z)$ das Residuum von $f_3(\zeta)$ von ull verschieden, so wäre diese Stelle für $w_\gamma(z)$ singulär. Die Ver- hiebung der Integrationslinie läßt sich also vornehmen. Es folgt

$$w_\gamma(z,t) = w_{-\gamma}(z,t)\,(= w(z,t)).$$

Um daraus auf die Gleichung

$$U_\gamma(x,t) = U_{-\gamma}(x,t) \tag{6}$$

hließen zu können, müssen wir uns noch überlegen, daß in der Ab- hätzung (33a) die Konstante unabhängig von γ wählbar ist. Nun ist ar in der Abschätzung (33) die Konstante wegen der möglichen Null- llen der Funktion $v_I(z)$ abhängig von γ, doch läßt sich, wofern die Ab- hätzung nur für große $|z|$ gelten soll, die Konstante unabhängig von γ stimmen, wie wir ja auch aus (35) wissen. Für große negative $\Im(z)$ t daher die Abschätzung (33a) mit von γ *unabhängigem* C. Gehen r von der ja auch möglichen Darstellung

$$t) = v_{II}(z)\int_{\gamma+i\infty}^{z} v_{II}^{-2}(\zeta)\, e^{\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} \int_{\gamma-i\infty}^{\zeta} v_{II}(\lambda)\, e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\, e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta$$

s, so ist in der Abschätzung (33a) für große positive $\Im(z)$ die Unabhängig- it der Konstanten bezüglich γ gesichert. Wir können also schließen

$$U_\gamma(x,t) = U_{-\gamma}(x,t) = U(x,t).$$

Daher ist

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, U(x,t)\, dt + \int_{x}^{\infty} \Delta_{2,t}(g)\, U(x,t)\, dt.$$

Aus (34) und (36) folgt aber

$$|U(x,t)| < C \cdot e^{-\gamma|x-t|}.$$

Aus

$$\Delta_{2,t}(g(t)) = O(|t|^{\alpha})$$

folgt dann gemäß dem Hilfssatz auf S. 49

$$W(x) = O(|x|^{\alpha}),$$

also auch wegen (30)

$$W'(x) = O(|x|^{\alpha}).$$

Aus

$$L_2(W) = \frac{2\pi i g(x) - L_0(W) - x L_1(W)}{x^2}$$

können wir ähnlich wie früher nach dem Satz T_1 von E. Schmidt (s. Einleitung) schließen

$$W(x) = O(|x|^{\alpha-2}), \qquad W'(x) = O(|x|^{\alpha-2}).$$

Es trete nunmehr der Ausnahmefall ein. Wir wissen, daß dann die Differentialgleichung

$$A_s(v(z)) = 0$$

eine im Streifen eindeutige reguläre Lösung $v_1(z)$ hat, für welche die Gleichungen (28) gelten, die also beiderseits im Unendlichen stark verschwindet. Unser Satz über inhomogene Differentialgleichungen läßt jetzt nur folgende Aussage zu:

Es gibt auf der imaginären Achse $z = iu$ eine Lösung $\overset{1}{w}(z,t)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$A_s(w) = e^{-st}(z+s)^{-2},$$

für welche

$$\lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{w}(z))}{\overset{1}{w}(z)} = -t.$$

Ebenso gibt es eine Lösung $\overset{2}{w}(z,t)$, für welche

$$\lim_{u=-\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{2}{w}(z))}{\overset{2}{w}(z)} = -t.$$

Es ist gemäß Abschätzung (20)

$$37) \qquad \begin{cases} \overset{1}{w}(z) = \dfrac{e^{-zt}(z+s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 + a_0 + \delta_1(z,t)}, \\ \overset{2}{w}(z) = \dfrac{e^{-zt}(z+s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 + a_0 + \delta_2(z,t)}, \end{cases}$$

$$\lim_{u=+\infty} \delta_1(z,t) = 0, \qquad \lim_{u=-\infty} \delta_2(z,t) = 0.$$

Jedoch sind diese Lösungen nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr haben lle Lösungen

$$\overset{1}{w}(z) + c v_I(z), \qquad \overset{2}{w}(z) + c v_I(z)$$

lieselbe Eigenschaft. Wir beheben diese Vieldeutigkeit, indem wir die Lösungen explizit aufschreiben

$$,t) = v_I(z) \int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda) e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} e^{-\lambda t} (\lambda + s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda) d\lambda d\zeta.$$

Die Integrationen erstrecken sich geradlinig. Doch soll über $d\zeta$ nicht durch die Nullstellen hindurch, sondern an ihnen vorbei integriert werden. Da das Residuum an diesen Stellen Null ist, braucht Näheres darüber nicht gesagt zu werden. Ist $v_I(0) = 0$, so soll in dem äußeren Integral die untere Grenze etwa $i\alpha$ sein, wobei $v_I(i\alpha) \neq 0$ ist. Diese Änderung ist völlig belanglos. Der Leser möge das selbst für die kommenden Schritte nachprüfen. Nach Bemerkung 4 hat das innere Integral

$$f_1(\zeta) = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

auf der imaginären Achse $\zeta + i\zeta''$ für $\zeta'' = +\infty$ die charakteristische Zahl $i\sqrt{a_0} - t$. Die unter dem äußeren Integralzeichen stehende Funktion

$$f_2(\zeta) = e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2} f_1(\zeta)(\zeta)$$

hat also für $\zeta'' = +\infty$ die charakteristische Zahl $-i\sqrt{a_0} - t$.

Da $v_I(z)$ nur endlich viele Nullstellen im Streifen hat, so läßt sich das äußere Integral von einem gewissen ζ'' geradlinig auffassen. Der Beweis von Bemerkung 4 lehrt uns, daß dann das Integral

$$\int_0^z f_2(\zeta) d\zeta$$

zur selben Zahl gehört. Die Funktion $\overset{1}{w}(z)$ gehört also auf der imaginären Achse $z = iu$ für $u = +\infty$ zur Zahl $-t$:

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{w}(z))}{\overset{1}{w}(z)} = -t.$$

Es zeigt sich entsprechend, daß

$$\overset{2}{w}(z,t) = v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{-i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} (\lambda+s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

für $u = -\infty$ zur Zahl $-t$ gehört. Es gelten also auch wieder die Abschätzungen (37). Die Integrale

$$\overset{1}{U}(x,t) = \int_0^{i\infty} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz \quad \text{und} \quad \overset{2}{U}(x,t) = \int_{-i\infty}^{0} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz$$

konvergieren also absolut und in x gleichmäßig und können einmal unter dem Integralzeichen differenziert werden. Daher hat $A(\overset{1}{U}(x) + \overset{2}{U}(x))$ einen Sinn und es ist nach (21)

$$\begin{aligned} A(\overset{1}{U}(x) + \overset{2}{U}(x)) &= \{x e^{zx} l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} + \{e^{zx} l_1(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} \\ &\quad - \left\{e^{zx}\frac{d}{dz}(l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z)))\right\}_{z=0} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)}(z+s)^{-2}\,dz. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z) &= v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta \cdot \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda \\ &= v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta \cdot \psi(t) = \psi(t)\cdot v_{II}(z). \end{aligned}$$

$v_{II}(z)$ ist dabei eine Lösung der homogenen Gleichung $A_z(v) = 0$.

Es ist also schließlich für

$$U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t)$$

$$\begin{aligned} (38)\quad A(U(x)) &= x\, l_2(0) v_{II}(0)\psi(t) - \psi(t) l_2'(0) v_{II}(0) - \psi(t) l_2(0) v_{II}'(0) \\ &\quad + l_1(0) v_{II}(0)\psi(t) + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}(z+s)^{-2}\,dz \\ &= A_{II}\, x\,\psi(t) + B_{II}\,\psi(t) + \varepsilon\, 2\pi i\, e^{-s(x-t)}(x-t) \\ &\quad (\varepsilon = 0 \text{ für } x - t \geqq 0, \quad \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \leqq 0). \end{aligned}$$

Wir definieren weiter

$$T(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}\, v_I(z)\, dz.$$

Nach (21) ist

$$\Lambda(T(x)) = 0.$$

Es sei ferner

$$\psi_{1,\gamma}(t) = \int_{\gamma}^{0} e^{-\int_{0}^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta \qquad (\gamma_0 > \gamma > 0),$$

38a) $$R_\gamma(x,t) = U(x,t) - \psi_{1,\gamma}(t) \cdot T(x).$$

Wir wollen zunächst als schon bewiesen annehmen, daß alle im folgenden auftretenden Integrale über dt absolut und in x gleichmäßig konvergent sind und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann. Wir definieren

$$W(x) = \int_{-\infty}^{0} \Delta_{2,t}(g(t))\, R_{-\gamma}(x,t)\, dt + \int_{0}^{\infty} \Delta_{2,t}(g)\, R_\gamma(x,t)\, dt.$$

Da offenbar

$$\Lambda(R(x)) = \Lambda(U(x))$$

ist, so ergibt sich

$$\Lambda(W(x)) = A_{II} x \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt + B_{II} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt + 2\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt,$$

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i c_g A_{II} x - 2\pi i c_g B_{II} = 2\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt.$$

Dabei ist

$$2\pi i c_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt.$$

Ganz ähnlich wie früher folgt daraus gemäß Satz I

$$\Lambda\left(\frac{1}{2\pi i} W\right) = g(x) + c_g (A_{II} x + B_{II}).$$

Die inhomogene Gleichung ist also bis auf einen linearen Ausdruck gelöst. Dieser kann nur dann verschwinden, wenn c_g Null wird. $l_2(0)$ ist nämlich von Null verschieden, weil rein imaginäre Wurzeln ausgeschlossen sind. Aus

$$A_{II} = 0$$

folgt also

$$v_{II}(0) = 0$$

und daraus

$$B_{II} = -l_2(0) v_{II}'(0).$$

Nach dem Eindeutigkeitstheorem über lineare Differentialgleichungen kann aber $v'_{II}(z)$ nicht zugleich mit $v_{II}(z)$ verschwinden. Also ist

$$B_{II} \neq 0.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$A(y) = A_{II}x + B_{II}$$

eine eigentliche Lösung hat. Definieren wir

$$\chi(x) = \int_0^{i\infty} e^{zx} v_I(z)\, dz.$$

Es ist nach (21)

$$A(\chi(x)) = -x l_2(0) v_I(0) + l'_2(0) v_I(0) + l_2(0) v'_I(0) - l_1(0) v_I(0)$$
$$= A_I(x) + B_I.$$

Die Funktion $\chi(x)$, für die $|\chi(x)| < \int_0^{i\infty} |v_I(z)|\, dz$, ist eine eigentliche Lösung dieser Gleichung. Jedoch ist niemals

$$A_I : B_I = A_{II} : B_{II}.$$

Es ist nämlich immer der absolute Betrag der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_I & A_{II} \\ B_I & B_{II} \end{vmatrix}$$

gleich $l_2^2(0)$, also verschieden von Null. Ist nämlich

$$v_I(0) \neq 0,$$

so folgt

$$v_{II}(0) = 0, \qquad v'_{II}(0) = v_I^{-1}(0).$$

Für

$$v_I(0) = 0$$

folgt aus der Reihenentwickelung

$$v'_I(0) = -v_{II}^{-1}(0).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Wir werden später zeigen, daß

$$A_I x + B_I,$$

vom Proportionalitätsfaktor abgesehen, der einzige lineare Ausdruck ist, der eine eigentliche Lösung zuläßt. Dann folgt also: die Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

nur dann lösbar, wenn

$$c_g = 0$$

. Sonst läßt nur

$$\Lambda(y) = g(x) + (c_g A_{II} + \lambda A_I)x + (c_g B_{II} + \lambda B_I)$$

ne eigentliche Lösung zu, wobei λ ein willkürlicher Parameter ist.

Wir haben noch die vorgenommenen Operationen zu rechtfertigen. nächst ist

$$\psi(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} v_I(\lambda) e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} (\lambda + s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda) d\lambda = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

r jede Vertikale im Streifen. Wegen (27) (28) sind die Bedingungen r die Verschiebung der Integrationslinie erfüllt. Gibt man γ immer das rzeichen von t, so folgt

9) $$|\psi(t)| < e^{-|\gamma t|} \cdot \text{konst.},$$

bei die Konstante von γ unabhängig ist.

Wir müssen noch das Verhalten von $U(x,t)$ für große t kennen. ir definieren:

$$\overset{1}{w}_\gamma(z,t) = v_I(z) \int_\gamma^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma + i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta.$$

Durchläuft z die Vertikale $\gamma + iu$, so gehört dieses Integral der in- mogenen Gleichung für $u = +\infty$ zur Zahl $-t$ und es gilt bei dieser näherung die (37) entsprechende Abschätzung. Das Integral

$$\overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \int_\gamma^{\gamma + i\infty} e^{zx}\, \overset{1}{w}_\gamma(z,t)\, dz$$

t also einen Sinn. Nun ist bei Verschiebung der Integrationslinie

$$\overset{1}{w}_\gamma(z,t) = v_I(z) \int_\gamma^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{+i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$= v_I(z) \int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$+ v_I(z) \int_\gamma^0 e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda d\zeta$$

$$= \overset{1}{w}(z,t) + v_I(z) \cdot \psi_1'(t).$$

Also ist

$$(40) \quad \overset{1}{V}_\gamma(x,t) = \int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} \overset{1}{w}(z,t) dz = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \psi_1(t) \int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z) dz$$

Wird $\overset{2}{w}_\gamma(z,t)$ entsprechend definiert, so ist

$$\overset{2}{w}_\gamma(z,t) = \overset{2}{w}_\gamma(z,t) + v_I(z) \psi_2(t)$$

$$\psi_2(t) = \int_\gamma^0 e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_1} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{-i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda d\zeta.$$

Also ist

$$(41) \quad \overset{2}{V}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma-i\infty}^\gamma e^{zx} \overset{2}{w}(z,t) dz = \overset{2}{U}_\gamma(x,t) - \psi_2(t) \int_{\gamma-i\infty}^\gamma e^{zx} v_I(z) dz.$$

Es sei ferner

$$V_\gamma(x,t) = \int_\gamma^0 e^{zx} (\overset{2}{w}(z,t) - \overset{1}{w}(z,t)) dz = \psi(t) \int_\gamma^0 e^{zx} v_{II}(z) dz.$$

Alsdann ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(42) \quad U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t) = \overset{1}{V}_\gamma(x,t) + \overset{2}{V}_\gamma(x,t) + V_\gamma(x,t),$$

falls die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie erfüllt sind. Um das zu beweisen, müssen wir $\overset{1}{w}(z,t)$ für große positive $\Im(z$ des Streifens abschätzen und ebenso $\overset{2}{w}(z,t)$ für große negative $\Im(z)$ Wir werden das gleich für die Funktionen $\overset{1}{w}_\gamma$ und $\overset{2}{w}_\gamma$ tun. Wir wissen daß $v_I(z)$ nur endlich viele Nullstellen hat. Sie mögen also etwa unterhalb des Querbalkens $\Im(z) = u_0$ liegen. Es ist

$$(43) \quad \overset{1}{w}_\gamma(z,t) = v_I(z) \int_\gamma^{\gamma+iu_0} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda d\zeta$$

$$+ v_I(z) \int_{\gamma+iu_0}^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda d\zeta = d_\gamma v_I(z) + \overset{1}{\bar{w}}(z,t)$$

γ und z mögen im folgenden innerhalb eines schmalen Teilstreifens bleiben in dem höchstens rein imaginäre Nullstellen von $v_I(z)$ liegen.

Die Größe

$$d_\gamma = \int_\gamma^{\gamma+iu_0} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_3'-l_1}{l_2}\,d\sigma}\, v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\alpha}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

ibt dann bei festem t für alle reellen γ in dem schmalen Teilstreifen em absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grenze, falls $v_I(0) \neq 0$. $v_I(0) = 0$, so ist c_γ auch beschränkt, wenn man als untere Grenze Integrals über $d\zeta$ $\gamma + i\alpha$ wählt, wobei $v_I(i\alpha) \neq 0$ ist. Es handelt n also nur darum, den zweiten Summanden in (43) abzuschätzen. Es ten für $v_I(z)$ die Abschätzungen

$$|v_I(z)| < e^{-|u|\sqrt{a_0}}\, |z+s|^{-1} \cdot \text{konst.}$$

d für genügend große $|z|$ im Streifen

$$|v_I^{-1}(z)| < e^{|u|\sqrt{a_0}}\, |z+s| \cdot \text{konst.}$$

Die erste Abschätzung gilt für alle $z = z' + iu$ des Streifens. Die nstante ist in beiden Abschätzungen unabhängig von z'. Daher ist

$$t) < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} e^{-u\sqrt{a_0}} |z+s|^{-1} \int_{u_0}^{u} e^{2\zeta''\sqrt{a_0}} \int_{\alpha}^{\zeta''} e^{\lambda''\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + 4s^2)^{-1}\, d\lambda''\, d\zeta'';$$

ist ferner

$$\int_{\infty}^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + 4s^2)^{-1}\, d\lambda'' < (\zeta''^2 + 4s^2)^{-1} \int_{\infty}^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{a_0}}\, d\lambda'',$$

$$\int_{u_0}^{u} e^{\zeta''\sqrt{a_0}} (\zeta''^2 + 4s^2)^{-1}\, d\zeta'' < e^{\frac{u}{2}} (u^2 + 4s^2)^{-1} \int_{u_0}^{u} e^{\frac{\zeta''}{2}\sqrt{a_0}}\, d\zeta'',$$

o

$$|\bar{\bar{w}}_\gamma(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} |z+s|^{-1} (u^2 + 4s^2)^{-1}$$

$$+ \text{konst.}\, e^{-\gamma t} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{a_0}} |z+s|^{-1} (u^2 + 4s^2)^{-1}$$

(konst. ist dabei unabhängig von γ).

Damit ist die Verschiebung der Integrationslinie in (42) gerechtfertigt. sse ich in der voranstehenden Abschätzung die untere Grenze 0 statt u_0, ergibt sich ganz ebenso für $\nu \neq 0$

$$, t)| < C_\gamma e^{-\gamma t} |z+s|^{-1} (u^2+s^2)^{-1} + C_\gamma' e^{-\gamma t} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{a_0}} (u^2+s^2)^{-1} |z+s|^{-1}$$

Also ist

$$) \qquad |\bar{\bar{U}}_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}.$$

Entsprechendes gilt, wenn der Index 1 durch 2 ersetzt wird. Nach (40), (41), (42) ist nun

$$U(x,t) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \psi_1(t)\int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz$$
$$+ \psi_2(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz + \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz$$
$$= \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz$$
$$+ \psi_1(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dx + (\psi_2(t) - \psi_1(t))\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz$$

Also

$$R_\gamma(x,t) = U(x,t) - \psi_1(t)\cdot T(x) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t)$$
$$+ \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz + \psi(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz \int_\gamma^{0} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta.$$

Mit Rücksicht auf (44), (39) folgt daher

$$|R_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}(e^{\gamma x}+1)$$
$$+ \text{konst. } e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|}.$$

Daraus folgt, daß die Funktion $W(x)$ einen Sinn hat und die auf sie ausgeübten Operationen erlaubt sind. Wir behaupten ferner, $W(x)$ ist eine eigentliche Lösung. Da nämlich offenbar immer

$$e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|} < e^{\gamma(x-t)}$$

ist, so folgt

$$|R_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}. \tag{45}$$

Ferner ist nach (38a)

$$R_\gamma(x,t) - R_{-\gamma}(x,t) = T(x)\int_\gamma^{-\gamma} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta.$$

Es ist aber

$$e^{-|\gamma t|}\left|\int_\gamma^{-\gamma} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{i\infty}^{\gamma} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta\right| < \text{konst.},$$

daher

$$|R_\gamma(x,t) - R_{-\gamma}(x,t)| < \left|T(x)\right| e^{|\gamma t|}\,\text{konst.}$$

Es ist aber

$$T(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v_I(z) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz,$$

raus

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{\gamma x}$$

gt. Da man γ das x entgegengesetzte Vorzeichen geben kann, so folgt

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma x|}$$

sogar

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma_0 x|}. \quad (\gamma_0 \text{ Randpunkt des Streifens.})$$

zen wir

$$\overline{W}(x) = \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g) R_{-\gamma}(x,t)\,dt + \int_{x}^{\infty} \Delta_{2,t}(g) R_{\gamma}(x,t)\,dt,$$

folgt aus (45) unter Benutzung des Hilfssatzes von E. Schmidt ite 49)

$$\overline{W}(x) = O(|x|^{a}) + O(1).$$

ist

$$W(x) = \overline{W}(x) + \int_{0}^{x} (R_{\gamma}(x,t) - R_{-\gamma}(x,t))\,dt$$

d

$$\left|\int_{0}^{x} (R_{\gamma} - R_{-\gamma})\,dt\right| < |T(x)| \int_{0}^{|x|} e^{|\gamma t|}\,dt \cdot \text{konst.}$$

$$< \text{konst.}\, e^{-\gamma_0 |x|} \cdot e^{\gamma |x|} \cdot |x| < \text{konst.}$$

so ist $W(x)$ eine eigentliche Lösung.

$$W(x) = O(|x|^{b}), \quad W'(x) = O(|x|^{b}) \quad b = a \text{ oder } b = 0.$$

In bekannter Weise läßt sich dann nach dem in der Einleitung erhnten T_I von E. Schmidt schließen

$$W(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}), \quad W'(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}),$$

bei

$$\bar{g}(x) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II})$$

etzt ist und $\bar{a}$ durch

$$\bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{a}})$$

iniert ist.

Nunmehr behandeln wir den Fall, daß a_0 negativ, also die beiden urzeln der Gleichung

$$x^2 + a_0 = 0$$

ll sind. Wir können dann über die Differentialgleichung

$$A_x(v) = 0$$

r folgendes aussagen:

Es gibt ein Integral $v_I(z)$ dieser Differentialgleichung, das in G' die rstellung zuläßt

$$v_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\,z} \bar{v}_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\,z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z),$$

das also in G' der Ungleichung

$$|v_1(z)| < \text{konst.}\,|z+s|^{-1} \tag{48}$$

genügt.

$v_I(z)$ sei nun jenes im Streifen reguläre und eindeutige Integral, da sich aus $v_1(z)$ durch analytische Fortsetzung von $+i\infty$ her ergib $v_{II}(z)$ sei das entsprechende Integral, das sich bei analytischer Fortsetzun von $v_1(z)$ innerhalb des Streifens von $-i\infty$ her ergibt. Offenbar genü $v_I(z)$ für positive $J(z)$ des Streifens der Abschätzung (48), $v_{II}(z)$ f negative $J(z)$.

Wir definieren

$$\overset{1}{w}(z,t) = v_I(z)\int_{i\infty}^{z} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\, v_I^{-2}(\zeta)\int_{i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\, e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-4}l_2^{-1}(\lambda)d$$

$$\overset{2}{w}(z,t) = v_{II}(z)\int_{-i\infty}^{z} e^{-\int_0^{z}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\, v_{II}^{-2}(\zeta)\int_{-i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t}v_{II}(\lambda)\, e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\, (\lambda+s)^{-4}l_2^{-1}(\lambda)$$

Auf der imaginären Achse $z = iu$, $\zeta = i\zeta''$, $\lambda = i\lambda''$ ergibt sich f große positive u

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.}\,|z+s|^{-1}\int_{\infty}^{u}\int_{\infty}^{\zeta''}(\lambda''^2+s^2)^{-2}\,d\lambda''\,d\zeta'',$$

da nämlich für große positive u wegen (47) $v_I(z) \neq 0$ und daher

$$|v_I^{-1}(z)| < \text{konst.}\,|z+s| \tag{49}$$

ist. Es folgt

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.}\,|z+s|^{-1}\int_{\infty}^{u}(\zeta''^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}\,d\zeta'' < \text{konst.}\,|z+s|^{-3}.$$

Entsprechend ist für große negative u

$$|\overset{2}{w}(z,t)| < \text{konst.}\,|z+s|^{-3}.$$

Daher haben die Integrale

$$\overset{1}{U}(x,t) = \int_0^{i\infty} e^{zx}\,\overset{1}{w}(z,t)\,dz, \qquad \overset{2}{U}(x,t) = \int_{-i\infty}^{0} e^{zx}\,\overset{2}{w}(z,t)\,dz$$

einen Sinn, konvergieren absolut und in x gleichmäßig und können unte dem Integralzeichen nach x einmal differenziert werden. Ist

$$U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t),$$

wird nach (21)

$$\Lambda(U(x)) = \{xe^{zx} l_2(z)(\overset{3}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} + \{e^{zx} l_1(z)(\overset{3}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0}$$
$$- \left\{ e^{zx} \frac{d}{dz} \left(l_2(z)(\overset{3}{w}(z) - \overset{1}{w}(z)) \right) \right\}_{z=0} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)} (z+s)^{-4} dz$$
$$= C(t)x + D(t) + \varepsilon 2\pi i e^{-s(x-t)} \frac{(x-t)}{3!} \begin{pmatrix} \varepsilon = 0 \text{ für } x - t \geqq 0 \\ \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \leqq 0 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir als schon bewiesen an, daß alle im folgenden vorkommenden Integrale über dt konvergieren und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann, so wird

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{4,t}(g(t)) U(x,t) dt$$

abgesehen von einem linearen Ausdruck eine Lösung der inhomogenen Gleichung. In der Tat ist

$$\Lambda(W(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{4,t}(g(t)\, \Lambda(U(x,t)) dt = x \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \Delta_{4,t}(g(t) dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} D(t) \cdot \Delta_{4,t}(g(t) dt + \frac{2\pi i}{3!} \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)} (x-t)^3 \Delta_{4,t}(g(t)) dt,$$

der

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i C_0 \cdot x - D_0 \cdot 2\pi i = \frac{2\pi i}{3!} \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)^3 \Delta_{4,t}(g(t)) dt.$$

Daraus läßt sich ganz wie früher gemäß unserem Satze I S. 46 schließen

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i C_0 x - 2\pi i D_0 = 2\pi i g(x)$$
$$\Lambda\left(\frac{1}{2\pi i} W\right) = C_0 x + D_0 + g(x) = \bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{\alpha}}).$$

Die Frage der Lösung der inhomogenen Gleichung ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$\Lambda(y) = ax + b$$

eine Lösung hat. Wir werden später zeigen, daß diese Gleichung niemals eine eigentliche Lösung hat. Sind also nicht zufällig C_0 und D_0 beide gleich Null, so ist die inhomogene Gleichung nur bis auf einen linearen Ausdruck lösbar.

Wir haben noch zu zeigen, daß $W(x)$ und die auf sie ausgeübten Operationen einen Sinn haben und daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist.

Die Funktion $v_l(z)$ hat wegen (47) nur endlich viele Nullstellen im

Streifen oberhalb der reellen Achse. Also gilt für genügend große $|z$ des Streifens

$$|v_I^{-1}(z)| = |v_I^{-1}(z' + iz'')| < \text{konst.}\,|z + s|;$$

z'' ist dabei positiv, die Konstante von z' unabhängig.

Also läßt sich nicht nur in dem Integral

$$f_1(\zeta) = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^{\lambda} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} (\lambda + s)^{-4} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda$$

die Integrationslinie auf eine andere Vertikale verschieben, sondern auch in dem Integral

$$\int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) f_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Daher ist auch

$$\overset{1}{w}(z, t) = v_I(z) \int_{\gamma + i\infty}^{\zeta} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} v_I^{-1}(\zeta) \int_{\gamma + i\infty}^{\lambda} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Wie vorhin ergibt sich daraus auf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ bei positivem u die Abschätzung

$$|\overset{1}{w}(z, t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} |z + s|^{-3}.$$

Die Konstante ist dabei unabhängig von γ wählbar. Da man γ immer das Vorzeichen von t geben kann, so folgt

$$|\overset{1}{w}(z, t)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma t|} |z + s|^{-3}.$$

Da die Konstante von γ unabhängig ist, so läßt sich in $\overset{1}{U}(x, t)$ die Integrationsgrenze verschieben:

$$\overset{1}{U}(x, t) = \overset{1}{U}_\gamma(x, t) - \int_\gamma^0 e^{zx} \overset{1}{w}(z, t)\, dz, \qquad \overset{1}{U}_\gamma(x, t) = \int_{\gamma + i0}^{\gamma + i\infty} e^{zx} \overset{1}{w}(z, t)\, dz,$$

d. h.

$$|\overset{1}{U}_\gamma(x, t)| < \text{konst.}\, e^{\gamma x} \cdot e^{-|\gamma t|},$$

$$\left|\int_\gamma^0 e^{zx} \overset{1}{w}(z, t)\, dz\right| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma t|} (e^{\gamma x} + 1).$$

Da Entsprechendes für den Zeiger 2 gilt, so ist bewiesen, daß die Funktion $W(x)$ einen Sinn hat und die ausgeführten Operationen erlaubt sind. Da ferner wegen

$$e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|} < e^{\gamma(x - t)}$$

gt, daß

$$|U(x,t)| < \text{konst.}\,(e^{\gamma(x-t)} + e^{-|\gamma t|})$$

, so gilt auch, indem man γ das $(x-t)$ entgegengesetzte Zeichen gibt

$$|U(x,t)| < \text{konst.}\,(e^{-|\gamma||x-t|} + e^{-|\gamma t|}).$$

Daraus folgt wieder unter Benützung des Hilfssatzes von E. Schmidt . 49)

$$W(x) = O(|x|^{\bar{n}}) + O(1); \quad \text{ebenso für } W'(x).$$

In bekannter Weise folgt daraus nach Satz T_I von E. Schmidt . Einleitung)

$$W(x) = O(|x|^{\bar{n}-2}); \qquad W'(x) = O(|x|^{\bar{n}-2}).$$

§ 4.

Eindeutigkeit der Lösungen.

Wir fragen uns, ob es noch andere eigentliche Lösungen der inhomonen Gleichung gibt. Anders gesprochen: Gibt es eigentliche Lösungen r homogenen Gleichung

$$\Lambda(y) = 0?$$

sei zunächst $a_0 > 0$. Aus der Stetigkeit von $y(x)$ folgt dann auch e Stetigkeit von $y'(x)$ für alle x. Ist dann $y(x)$ eine solche eigentche Lösung, so läßt sich ganz wie früher aus

$$L_2(y) = \frac{-L_0(y) - xL_1(y)}{x^2}$$

hließen

$$y = O(|x|^{-\infty}); \qquad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Setzen wir

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\,dx,$$

hat für rein imaginäre α dieses Integral einen Sinn und läßt sich bebig oft unter dem Integralzeichen nach α differenzieren. Aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \Lambda(y)\,dx = 0$$

gt ganz wie früher

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0.$$

Tritt der Ausnahmefall nicht ein, so gibt es kein Integral $v(\alpha)$ von

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0,$$

das beiderseits im Unendlichen auf der imaginären Achse beschränkt bleibt. Andererseits ist

$$|\varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\,dx.$$

also ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

woraus nach dem 2. Hilfssatz (Seite 54)

$$y(x) \equiv 0$$

folgt. Tritt dagegen der Ausnahmefall ein, so verschwindet das Integral $v_I(z)$ beiderseits im Unendlichen sehr stark. Vom willkürlichen Faktor abgesehen ist es das einzige Integral dieser Art. Aus

$$\varphi(\alpha) = v_I(\alpha)$$

folgt aber, da $y(x)$ die Fouriersche Integraldarstellung zuläßt,

$$y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz = T(x) = O\left(e^{-|\gamma_0 x|}\right)$$

nach (46). Die homogene Gleichung läßt also im Ausnahmefalle eine eigentliche Lösung zu. Sie ist bis auf den willkürlichen Faktor eindeutig bestimmt.

Sei nun $a_0 < 0$. Aus der Stetigkeit von $y(x)$ für alle x folgt jetzt nicht ohne weiteres die Stetigkeit von $y'(x)$ für alle x. Vielmehr sind die Stellen $x = \pm\sqrt{-a_0}$ fraglich. Doch läßt sich auch hierfür die Stetigkeit von $y'(x)$ erschließen. Wir zeigen das für die Stelle $x = +\sqrt{-a_0}$. Zunächst muß sein

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} (x - \sqrt{-a_0})\, y'(x) = 0,$$

da sonst $y(x)$ für $x = \sqrt{-a_0}$ wie $\log(x - \sqrt{-a_0})$ unendlich groß werden würde. Der Limes muß nämlich existieren, weil

$$(x - \sqrt{-a_0})\, y'(x) + \psi(x)\, y(x+1) = 0$$

ist, wobei $\psi(x)$ für $x = \sqrt{-a_0}$ und für eine Umgebung dieses Punktes stetig ist. Es ist also

$$\psi(\sqrt{-a_0})\, y(\sqrt{-a_0}+1) = 0$$

und daher

$$y'(x) = -\frac{\psi(x)\, y(x+1) - \psi(\sqrt{-a_0})\, y(\sqrt{-a_0}+1)}{x - \sqrt{-a_0}},$$

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} y'(x) = \left(\psi(x)\, y(x+1)\right)'_{x=\sqrt{-a_0}}.$$

Die Ableitung rechts existiert aber, also existiert der Grenzwert der

inken Seite. $y'(x)$ ist also auch für alle x stetig. Daher kann man uch jetzt wieder aus

$$L_2(y) = \frac{-xL_1(y) - L_0(y)}{x^2}$$

nd

$$y = O(|x|^b) \qquad (b \text{ irgendeine Zahl})$$

chließen

$$y = O(|x|^{-\infty}) \quad \text{und} \quad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Das Integral

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx$$

hat also bei rein imaginärem α einen Sinn. Wie vorher läßt sich aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} A(y)\, dx = 0$$

chließen, daß

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0$$

st. Wir kennen aber im Falle $a_0 < 0$ nicht das Verhalten des allgemeinen Integrals auf der imaginären Achse. Der folgende Satz ist ausreichend für unsere Schlüsse:

Sei

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(t) \dots \varphi_{1,n}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{n,1}(t) \dots \varphi_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

ine Matrix. Sei ferner bei reellem t

$$\lim_{t=+\infty} \varphi_{\nu,\mu}(t) = a_{\nu,\mu}$$

nd

$$|t(\varphi_{\nu,\mu}(t) - a_{\nu,\mu})| < C \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n),$$

obei C eine Konstante ist. Die Gleichung

$$E_\varrho - A = 0,$$

obei $A = (a_{\nu,\mu})$ und E die Einheitsmatrix bezeichnet, habe nur rein maginäre und voneinander verschiedene Wurzeln $i\varrho_1, \dots, i\varrho_n$. Die Größen

$$Y = (y_1(t), \dots, y_n(t)); \quad Y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t))$$

ollen ferner als Vektoren im n-dimensionalen Raume aufgefaßt werden.

Zu jeder Lösung Y des Systems simultaner Differentialgleichungen

$$Y' = \Phi(Y)$$

gibt es dann zwei Zahlen σ_1 und σ_2, so daß für genügend große t

$$|Y| < \text{konst.}\, t^{\sigma_1},$$
$$|Y| > \text{konst.}\, t^{\sigma_2}.$$

Beweis. Da die Wurzeln von $E_\varrho - A = 0$ voneinander verschieden sind, gibt es eine Matrix B, so daß

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} i\varrho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i\varrho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & i\varrho_n \end{pmatrix}$$

ist. Sei

$$U = B^{-1}(Y),$$

also

$$U' = B^{-1}(Y').$$

Es ist

$$U' = B^{-1}\Phi B(U) = \Psi(U),$$

wobei die Matrix Ψ die Gestalt hat

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} i\varrho_1 + \psi_{11}(t), & \psi_{1,2}(t), & \dots & \psi_{1,n}(t) \\ \psi_{2,1}(t), & \ddots & & \\ \vdots & & i\varrho_\nu + \psi_{\nu,\nu}(t), & \\ \vdots & & & \ddots \\ \psi_{n,1}(t), & \dots\dots\dots, & & i\varrho_n + \psi_{n,n}(t) \end{bmatrix}$$

und

$$|\psi_{\nu,\mu}(t)| < \frac{C}{t}.$$

Daher ist der Realteil des inneren Produktes von U' und $\overline{U}$

$$\Re(U', \overline{U}) < \frac{C}{2t}(|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2) = \frac{C}{2t}|U|^2,$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}(|U|^2) < \frac{C}{t}|U|^2.$$

Daraus folgt leicht die Behauptung für $|U|$, also auch für $|Y|$.

Wir wenden den Satz an für $n = 2$, benötigen aber nur die Existenz der Zahl σ_2. Im Falle $a_0 < 0$ läßt sich nämlich

$$A_z(v) = 0$$

bei rein imaginärem $z = iu$ als ein simultanes Differentialsystem der obigen Art auffassen, wenn man auf die reelle Veränderliche u transformiert. Also folgt für jedes Integral $v(z)$, daß

$$|V(z)| > C \cdot |z|^{\sigma_2},$$

bei der Vektor V definiert ist durch

$$V = (v(z), v'(z)).$$

Diese Ungleichung gilt sowohl für positive wie negative u.

Wir behaupten: Auch die höheren Ableitungen der eigentlichen Lö-
ng $y(x)$ müssen an den Stellen $x = \pm\sqrt{-a_0}$ stetig sein. Es ist

$$(x-\sqrt{-a_0})\,y''(x) + y'(x) + \psi(x)\,y'(x+1) + \psi'(x)\,y(x+1) = 0.$$

existiert also

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} (x-\sqrt{-a_0})\,y''(x)$$

d muß Null sein, weil sonst $y'(x)$ an der Stelle $x=\sqrt{-a_0}$ wie
$(x-\sqrt{-a_0})$ unendlich groß werden würde. Also genügt die Funktion

$$q(x) = y'(x)$$

r Differentialgleichung

$$(x-\sqrt{-a_0})\,q'(x) + q(x) = P(x),$$

bei $P(x)$ nebst ihren Ableitungen stetig ist für $x=\sqrt{-a_0}$ und eine
mgebung dieses Punktes. Schon beim linearen Fall hatten wir gesehen,
ß diese Differentialgleichung nur eine stetige Lösung $q(x)$ hat und daß
e Ableitung $q'(x)$ auch für $x=\sqrt{-a_0}$ stetig ist. Daraus folgt aber,
ß $y''(x)$ auch stetig ist im Punkte $x=\sqrt{-a_0}$.

Die Funktion $q(x) = y^{(m)}(x)$ genügt einer Differentialgleichung

$$(x-\sqrt{-a_0})\,q'(x) + m\,q(x) = P(x),$$

$P(x)$ dieselben Eigenschaften hat wie oben. Es gibt wieder nur eine
$x=\sqrt{-a_0}$ stetige Lösung $q(x)$ und $q'(x)$ ist auch für diesen Wert
etig. Also sind alle Ableitungen von $y(x)$ für alle x stetig. Natürlich
t auch

$$y^{(m)}(x) = O(|x|^{-\infty}).$$

er Ausdruck

$$\alpha^m \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x}\, y^{(m)}(x)\,dx$$

t daher einen Sinn. Desgleichen

$$\alpha^m \varphi'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\frac{d^m}{dx^m}(y(x)\cdot x)\,dx.$$

s ist also

$$|\alpha^m \varphi(\alpha)| < C_m, \qquad |\alpha^m \varphi'(\alpha)| < C_m.$$

Dann kann aber wegen

$$A_a(\varphi(\alpha)) = 0$$

nur $\varphi(\alpha) \equiv 0$ sein. Sonst ergäbe sich nämlich auf Grund des Hilfssatzes über das simultane Differentialsystem ein Widerspruch, falls nur

$$m > -\sigma_2$$

gewählt wird. Aus

$$\varphi(\alpha) \equiv 0$$

folgt wieder

$$y \equiv 0.$$

Die homogene Gleichung hat also keine eigentliche Lösung.

Wir wollen anschließend gleich beweisen, daß für $\alpha_0 < 0$ auch die Gleichung

$$A(y) = c_1 x + c_2$$

keine eigentliche Lösung zuläßt. Andernfalls ließe sich zunächst ganz wie eben bei der homogenen Gleichung die Stetigkeit von $y'(x)$ und der höheren Ableitungen für alle x erschließen. Aus $y = O(|x|^b)$ können wir dann in bekannter Weise schließen

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus

$$\frac{d}{dx}(A(y)) = c_1$$

oder

$$L_2(y') = \frac{-L_0(y') - x L_1(y') - L_1(y) - 2x L_2(y) - c_1}{x^2}$$

schließt man ganz ebenso

$$y' = O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Durch fortgesetztes Differenzieren kann man weiter schließen

$$y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad y''' = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

und so fort. Wir definieren

$$\alpha^3 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'''(x)\, dx.$$

Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ist für rein imaginäre α und $\alpha \neq 0$ bestimmt und besitzt zwei Ableitungen, wie man durch Differenzieren der letzten Gleichung erkennt. Wir behaupten:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0.$$

Daraus kann man dann ganz wie zuletzt schließen

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

also

$$y'''(x) \equiv 0,$$

raus wegen $y = O\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y \equiv 0$$

gt, was der Gleichung

$$\Lambda(y) = c_1 x + c_2$$

derspricht. Wir haben also nur zu zeigen

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0.$$

n ist

$$0 = \frac{d^4}{dx^4}(\Lambda(y)) = x^2 L_2(y^{IV}) + 8x L_2(y''') + x L_1(y^{IV}) + L_1(y''') + L_0(y^{IV}).$$

s

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^4}{dx^4}(\Lambda(y))\, dx$$

ren die bekannten Umformungen in glatter Rechnung zu der Behauptung:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0 \qquad (\alpha \neq 0).$$

Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, daß für $a_0 > 0$ im Ausnahmefall m Proportionalitätsfaktor abgesehen nur die lineare Gleichung

$$\Lambda(y) = A_I x + B_I$$

ie eigentliche Lösung besitzt. Hätte

$$\Lambda(y) = cx + d$$

ie eigentliche Lösung, so wäre sie mit allen Ableitungen für sämtliche tig. Ganz wie vorhin können wir schließen:

$$= O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad y''' = O\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ usw.}$$

Definieren wir wieder

$$\alpha^3 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'''\, dx,$$

ist $\varphi(\alpha)$ bei rein imaginärem α und $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt. Wir nnen auf dieselbe Weise schließen:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0 \qquad (\alpha \neq 0).$$

andererseits für große $|\alpha|$ $\varphi(\alpha)$ beschränkt ist, so kann — vom konnten Faktor weiterhin abgesehen — nur $\varphi(\alpha) \equiv 0$ oder $\varphi(\alpha) = v_I(\alpha)$ n. Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. es ist sowohl für positive wie negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0.$$

Dann ist auch

$$y \equiv 0;$$

2. es ist sowohl für positive wie negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_l(\alpha).$$

Dann folgt gemäß der Fourierschen Integraldarstellung

$$y''' = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} z^3 v_l(z)\, dz,$$

also

$$y(x) = T(x);$$

ebenfalls ein hier uninteressanter Fall;

3. es ist etwa für positive $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

dagegen für negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_l(\alpha).$$

Dann folgt

$$y''' = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} z^3 \varphi(z)\, dz = \int_0^{i\infty} e^{zx} z^3 v_l(z)\, dz, \qquad y = \int_0^{i\infty} e^{zx} v_l(z)\, dz,$$

woraus

$$\Lambda(y) = A_l \cdot x + B_l$$

folgt.

Der vierte Fall, daß für positive $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_l(\alpha),$$

dagegen für negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0$$

ist, führt auch auf

$$\Lambda(y) = A_l \cdot x + B_l.$$

Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Behalten alle diese Sätze und Entwicklungen Gültigkeit für den allgemeinen Fall

$$\Lambda(y) = (x^2 + a_0)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x + h_{\nu,\varrho}),$$

wo die $p_{\nu,\varrho}(x)$ quadratisch in x sind?

Für $a_0 > 0$ bleiben alle Sätze gültig. Freilich ändert sich in einem Punkte die Entwicklung. Die Darstellung (27) der Integrale von

$$A_2(v) = 0$$

ist im allgemeinen nicht möglich. Doch werden alle aus jener Darstellung abgeleiteten, notwendigen Folgerungen auf anderem Wege erhalten, worüber in der zweiten Mitteilung Näheres gesagt wird.

Für $a_0 < 0$ ist wieder der Fall zu beachten, daß die $h_{n-1,\varrho}$ nicht alle
n Null verschieden. Sind zunächst diese Größen alle verschieden von
ull, so behalten alle Sätze ihre Gültigkeit. Die Entwicklungen ändern
ch nur, soweit die Darstellung (26) in Betracht kommt, die durch gleich-
ertige Aussagen ersetzt wird. Hat dagegen $A(y)$ die Gestalt

$$(y) = (x^2+a_0)y^{(n)}(x)+(ax^2+bx+c)y^{(n-1)}(x)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)y^{(\nu)}(x+h_{\nu,\varrho}),$$

o die $h_{n-1,\varrho} \neq 0$ sind, so bleiben zunächst für $b > -1$ die Sätze alle
ltig. Die Entwicklungen ändern sich nur in geringfügiger Weise, ähnlich
e beim linearen Fall. Für $b < -1$ treten dagegen Änderungen ein.
ir können nicht mehr aus der Stetigkeit der $n-1$ ersten Ableitungen
f die der n-ten schließen. Es kann jetzt vorkommen, muß aber nicht
r Fall sein, daß die homogene Gleichung eine, ja sogar zwei verschiedene
gentliche Lösungen hat. Diese Lösungen ergeben sich in der Form

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v(z)\,dz,$$

o $v(z)$ eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$A_z(v(z)) = 0$$

. Es ist für sie auch immer $y^{(n)}(x)$ stetig. Wir behaupten: es kann
gentliche Lösungen mit stetiger n-ter Ableitung nur solche geben, die
ch in die Form

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v(z)\,dz$$

tzen lassen. Insbesondere kann es also nie mehr als zwei linear un-
hängige Lösungen solcher Art geben. Das ergibt sich ganz wie früher.
t nämlich $y^{(n)}(x)$ stetig, so läßt sich aus $y^{(\nu)} = O(|x|^b)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$
bekannter Weise schließen

$$y^{(\nu)}(x) = O(|x|^{-\infty}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

ie Funktion

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\,dx$$

uß dann wieder eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung
in, woraus die Behauptung folgt. Wie sich entscheiden läßt, ob es eine
gentliche Lösung der homogenen Gleichung gibt, darüber Näheres zu
gen wird in der zweiten Mitteilung Gelegenheit sein. Daß natürlich
ch eine Gleichung

$$A(y) = cx + d \quad \text{und also auch} \quad A(y) = g(x)$$

unter Umständen lösbar ist, wenn die homogene Gleichung lösbar ist, dürfte klar sein.

Die Untersuchung der funktionalen Differentialgleichung für den Fall, daß die Koeffizienten Polynome vom Grade m sind, hat das Hauptziel, die Integrale der Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$A_z(v(z)) = 0$$

für große $|z|$ im Streifen zu studieren. Das erleichtern wir uns zunächst dadurch, daß wir den Perronschen Satz auf komplexe Variable ausdehnen. Freilich genügt das nicht. Vielmehr brauchen wir noch ein eingehenderes Studium der Integrale.

(Eingegangen am 12. Februar 1921.)

ber die $(C\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $\frac{1}{2} < \delta < 1$.

Von

Erwand Kogbetliantz in Moskau.

In seiner Arbeit über die $(C\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen eihe

$$F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \iint_S F(\theta', \varphi') \cdot P_n(\cos\gamma) \cdot d\sigma' \qquad (1)$$

wies Herr Gronwall[1]), daß die Reihe (1) einer auf der Einheitskugel S solut integrierbaren Funktion $F(\theta, \varphi)$ im Stetigkeitspunkte (θ, φ) dieser nktion $(C, 1)$-summierbar ist mit der Summe $F(\theta, \varphi)$.

Folglich hängt für $\delta \geqq 1$ die $(C\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen ihe einer absolut integrierbaren Funktion in einem Punkte (θ, φ) nur m Verhalten der Funktion in der Umgebung dieses Punktes ab.

Außer diesem Hauptresultat bewies weiter Herr Gronwall in einer deren Arbeit[2]), daß die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma \geqq \pi - \varepsilon} F(\theta', \varphi') \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot d\sigma' = 0 \qquad (\delta < 1),$$

der $s_n^{(\delta)}(\gamma) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma)}{A_n^{(\delta)}}$ das arithmetische Mittel der Ordnung $\delta < 1$ der ihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot P_n(\cos\gamma) \qquad (\pi \geqq \gamma > 0)$$

zeichnet, die notwendige und hinreichende Bedingung für die $(C\delta)$-mmierbarkeit der Reihe (1) im Stetigkeitspunkte (θ, φ) ist, falls $< \delta < 1$ ist.

[1]) Mathem. Annalen 74 (1913), S. 213–270, § 7.
[2]) Mathem. Annalen 75 (1914), S. 321–375, § 5.

Diese Bedingung (2) bezieht sich auf die Umgebung des Punktes $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$, d. h. $\gamma=\pi$, der auf der Kugel S dem Punkte (θ, φ) gegenüber liegt. Also hängt die $(C\,\delta)$-Summierbarkeit der Reihe (1) im Punkte (θ, φ) für $\delta<1$ auch vom Verhalten der Funktion $F(\theta', \varphi')$ in der Umgebung des Gegenpols $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ ab. Herr Gronwall hat diese Abhängigkeit nicht näher untersucht. Das soll in dieser Arbeit geschehen.

Schon Herr Gronwall hat bemerkt, daß (2) für jedes $\delta>\frac{1}{2}$ befriedigt ist, falls die Funktion $F(\theta', \varphi')$ in der Umgebung des Punktes $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ beschränkt ist. Wir werden den Fall untersuchen, in dem die Funktion $F(\theta', \varphi')$ im Punkte $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ von der Ordnung s unendlich wird, d. h. in der Umgebung $\gamma\geqq\pi-\varepsilon$ des Gegenpols $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ in der Gestalt

$$F(\theta', \varphi')=\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s}\cdot F_1(\theta', \varphi') \qquad (s<2) \tag{4}$$

darstellbar ist, wo $F_1(\theta', \varphi')$ beschränkt ist; dabei soll $s<2$ sein, denn die Funktion $F(\theta', \varphi')$ ist absolut integrierbar auf S vorausgesetzt. Es ist leicht beweisbar, daß, wenn $s<\frac{3}{2}$, die Limesgleichung (2) für jedes $\delta>\frac{1}{2}$ befriedigt ist. Ist nämlich $s=\frac{3}{2}-\eta$, $(\eta>0)$, so haben wir

$$J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)=O\Big[\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\eta-\frac{3}{2}}\cdot|s_n^{(\delta)}(\gamma)|\cdot\sin\gamma\cdot d\gamma\Big].$$

Aber[3]) für $\gamma\geqq\pi-\varepsilon$ ist

$$\sqrt{\sin\gamma}\cdot|s_n^{(\delta)}(\gamma)|\leqq\frac{c_1\cdot(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{1+\delta}}+\frac{c_2}{(n+1)\cdot\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}=O\left[(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}\right]$$

und daher $(\eta>0)$

$$J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)=O\Big\{(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}\cdot\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\eta-1}\cdot d\gamma\Big\}=O\left\{(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}\right\}.$$

Damit haben wir bewiesen, daß die Reihe (1) im Punkte (θ, φ) für jedes $\delta>\frac{1}{2}$ (C, δ)-summierbar ist, wenn die Funktion $F(\theta', \varphi')$ im Gegenpol $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ von der Ordnung $s<\frac{3}{2}$ unendlich wird.

Es sei jetzt $s\geqq\frac{3}{2}$. Wir untersuchen zuerst den Fall, daß $F_1(\theta', \varphi')$ im Punkte $(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$ „regulär", d. h. von der Form

$$F_1(\theta', \varphi')=A_0+\cos\frac{\gamma}{2}\,f_1(\theta', \varphi') \qquad (A_0\neq 0,\ \gamma\geqq\pi-\varepsilon),$$

[3]) Vgl. die Fußnote [5]). — Die Konstanten $c_1, c_2, \ldots$ sind im folgenden von n und γ unabhängig.

i der nun $f_1(\theta', \varphi')$ beschränkt und $A_0 \neq 0$ ist, so daß also

$$F(\theta', \varphi') = A_0 \cdot \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} + F_2(\theta', \varphi') \qquad \left(2 > s \geqq \frac{3}{2}\right)$$

. Da die Funktion $F_2(\theta', \varphi')$ im Punkte $(\pi - \theta,\ \varphi + \pi)$ von der rdnung $s - 1 < 1$ unendlich wird, haben wir für jedes $\delta > \frac{1}{2}$

$$\lim_{n=\infty} j_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma > \pi - \varepsilon} F_2(\theta', \varphi') \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot d\sigma' = 0$$

d folglich

$$^{\delta)}(\theta, \varphi) = \frac{A_0}{2\pi} \cdot \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma + j_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = \frac{A_0}{2\pi} \cdot i_n^{(\delta, s)} + o(1).$$

Um das Integral $i_n^{(\delta, s)}$ abzuschätzen, bemerken wir, daß erstens

$$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma = 0 \qquad \left(\delta > \frac{1}{2}\right),$$

, da für jedes $\delta > \frac{1}{2}$ gleichmäßig im Intervalle $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}(\gamma) = 0 \qquad (\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi - \varepsilon,\ \delta > \tfrac{1}{2})$$

lt[4]), und daß zweitens[5])

$$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{\varepsilon} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma = 1 \qquad \left(\delta > \frac{1}{2}\right)$$

. Folglich ist für jedes $\delta > \frac{1}{2}$

$$i_n^{(\delta, s)} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \cdot \int_{0}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \cdot \sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma) \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma - 1 + o(1) \qquad \left(\delta > \frac{1}{2}\right),$$

daß die Aufgabe auf die Abschätzung des Integrals

$$j_n = \int_{0}^{\pi} \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{-s} \cdot \sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma) \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma = 2^{\frac{s}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_n^{(\delta)}(-u) \cdot du}{(1-u)^{\frac{s}{2}}}$$

rückgeführt ist. Um j_n abzuschätzen, betrachten wir die Funktion

$$\Phi_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n \cdot z^n = 2^{\frac{s}{2}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-u)^{-\frac{s}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sigma_n^{(\delta)}(-u) \right\} \cdot du.$$

---

[4]) Chapman, Mathem. Annalen 72 (1912), S. 214; (C 2) und (C 5).
[5]) Gronwall, a. a. O. [2]), S. 355; (68).

Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot P_n(\cos\gamma)\cdot z^n=\frac{1}{2}\,\frac{1-z^2}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{s}{2}}}$$

bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot\sigma_n^{(\delta)}(-u)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-z^2}{(1-z)^{\delta+1}\cdot(1+2uz+z^2)^{\frac{s}{2}}},$$

also

$$\Phi_s(z)=\frac{2^{\frac{s}{2}-1}\cdot(1+z)}{(1-z)^{\delta}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u)^{-\frac{s}{2}}\cdot du}{(1+2uz+z^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Nehmen wir $v=\frac{1+u}{2}$ als neue Integrationsvariable und setzen $\tau=\tau(z)=-4z\cdot(1-z)^{-}$, so haben wir einfach

$$\Phi_s(z)=\frac{2}{2-s}\cdot\frac{1+z}{(1-z)^{s+\delta}}\cdot F\left(\frac{3}{2},\,1,\,2-\frac{s}{2},\,\tau\right),$$

wo $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ die hypergeometrische Funktion bedeutet. Die Funktion $\Phi_s(z)$ hat nur die beiden singulären Punkte $z_1=1$ $(\tau=\infty)$ und $z_2=-1$ $(\tau=1)$, und der Einheitskreis ist der Konvergenzkreis der Reihe $\Sigma j_n z^n$. Vermittelst der Darbouxschen Methode werden wir jetzt leicht einen asymptotischen Ausdruck für deren Koeffizienten j_n gewinnen. Um diese Methode anzuwenden, bilden wir mit Hilfe der elementarsten Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion folgende Darstellungen unserer Funktion $\Phi_s(z)$:

$$\Phi_s(z)=\frac{2}{2-s}\cdot\frac{1+z}{(1-z)^{s+\delta}\cdot(1-\tau)}\cdot F\left(\frac{1-s}{2},\,1,\,2-\frac{s}{2},\,\frac{\tau}{\tau-1}\right)=\frac{\varphi_1(z)}{(1-z)^{1+\delta}}$$

$$=\frac{2}{2-s}\cdot\frac{1}{(1+z)\cdot(1-z)^{1+\delta}}\cdot F\left(\frac{1-s}{2},\,1,\,2-\frac{s}{2},\,\frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

und

$$\Phi_s(z)=\frac{2}{2-s}\cdot\frac{1+z}{(1-z)^{s+\delta}\cdot(1-\tau)^{\frac{1+s}{2}}}\cdot F\left(\frac{1-s}{2},\,1-\frac{s}{2},\,2-\frac{s}{2},\,\tau\right)=\frac{\varphi_2(z)}{(1+z)^s}$$

$$=\frac{2}{2-s}\cdot\frac{1}{(1-z)^{2+\delta-s}(1+z)^s}\cdot F\left(\frac{1-s}{2},\,1-\frac{s}{2},\,2-\frac{s}{2},\,-\frac{4z}{(1-z)^2}\right),$$

welche das Verhalten von $\Phi_s(z)$ in den Punkten $z_1=1$ und $z_2=-1$ deutlich hervortreten lassen.

Nun befriedigen die Parameter $\alpha_1=\frac{1-s}{2}$, $\beta_1=1$, $\gamma_1=2-\frac{s}{2}$ und $\alpha_2=\frac{1-s}{2}$, $\beta_2=1-\frac{s}{2}$, $\gamma_2=2-\frac{s}{2}$ die Bedingung $\alpha+\beta-\gamma<0$, und darum existieren

$$\varphi_1(1) = \frac{2}{2-s} \cdot \frac{1}{2} \cdot F\left(\frac{1-s}{2}, 1, 2-\frac{s}{2}, 1\right) = \frac{1}{2-s} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(2-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} = 1$$

ıd.

$$_2(-1) = \frac{2}{2-s} \, 2^{s-\delta-2} \cdot F\left(\frac{1-s}{2}, 1-\frac{s}{2}, 2-\frac{s}{2}, 1\right) = \frac{2^{-\delta} \cdot \pi \cdot \Gamma(s)}{\sin\frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} .$$

Nach der Darbouxschen Methode müssen wir jetzt die Funktion

$$\Psi_s(z) = \frac{\varphi_1(1)}{(1-z)^{1+\delta}} + \frac{\varphi_2(-1)}{(1+z)^s}$$

die Taylorsche Reihe entwickeln:

$$\Psi_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \left\{ A_n^{(\delta)} + (-1)^n \frac{2^{-\delta} \cdot \pi \cdot \Gamma(n+s)}{\sin\frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma(n+1)} \right\},$$

o $A_n^{(\delta)} = \dfrac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)\,\Gamma(n+1)}$ ist. Folglich ist

$$j_n = A_n^{(\delta)} \cdot [1 + o(1)] + (-1)^n \frac{2^{-\delta} \cdot \pi \cdot \Gamma(n+s)}{\sin\frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma(n+1)} [1 + o(1)]$$

ıd also

$$_{\cdot s)} = \frac{j_n}{A_n^{(\delta)}} - 1 + o(1) = o(1) + (-1)^n \cdot \frac{2^{-\delta} \cdot \pi \cdot \Gamma(n+s) \cdot \Gamma(\delta+1)}{\sin\frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma(n+\delta+1)} [1 + o(1)]$$

ıd endlich

$$_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = (-1)^n \cdot \frac{A_0 \cdot \Gamma(\delta+1)}{2^{1+\delta} \cdot \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} (n+1)^{s-1-\delta} \cdot \{1 + o(1)\} + o(1).$$

Damit ist also bewiesen, daß $\lim_{n=\infty} J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = 0$ ist, falls $\delta > s-1$, daß aber das Integral $J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)$ zwischen endlichen Grenzen oszilliert r $\delta = s-1$ und sogar zwischen $-\infty$ und $+\infty$, falls $\delta < s-1$ ist. ieses Ergebnis formulieren wir im folgenden Satz:

I. *Die Laplacesche Reihe einer auf der Kugel S absolut integrier-ren Funktion $F(\theta', \varphi')$ ist im Stetigkeitspunkte (θ, φ) mit der Summe (θ, φ) $(C\delta)$-summierbar für jedes $\delta > \frac{1}{2}$, falls $F(\theta', \varphi')$ im Gegenpol $-\theta, \varphi + \pi)$ von einer Ordnung $s \leqq \frac{3}{2}$ unendlich wird; ist $s > \frac{3}{2}$ und t die Funktion $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^s \cdot F(\theta', \varphi')$ im Gegenpol „regulär". so ist die aplacesche Reihe im Punkte (θ, φ) für ein $\delta < 1$ nur dann $(C\delta)$-ınmierbar, falls $\delta > s-1$ ist; für $\delta = s-1$ oszillieren ihre arith-etischen Mittel zwischen endlichen und für $\delta < s-1$ sogar zwischen nendlichen Grenzen.*

Es sei jetzt $s > \frac{3}{2}$ und die Funktion $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{s} \cdot F(\theta', \varphi')$ sei nur beschränkt für $\gamma \geqq \pi - \varepsilon$. Um diesen allgemeinen Fall zu erledigen, wollen wir zunächst nur die Integrierbarkeit des Produktes $\left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} \cdot |F(\theta', \varphi')|$ auf der Kugel S $(\delta > \frac{1}{2})$ voraussetzen.

Im folgenden stützen wir uns auf die Ungleichungen

$$(5) \qquad |s_n^{(\delta)}(\gamma)| < \frac{c_3 \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1} \cdot \sqrt{\sin\gamma}} + \frac{c_4}{(n+1)\cdot\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{3}} \qquad \begin{pmatrix} \delta > -1 \\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 < \gamma < \pi \end{pmatrix}$$

und

$$(6) \qquad |s_n^{(\delta)}(\gamma)| < \frac{c_5 \cdot (n+1)^{1-\delta}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq \delta \leqq 2 \\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 < \gamma < \pi \end{pmatrix}.$$

Diese Ungleichungen sind mit Hilfe des Residuensatzes leicht beweisbar. Aus $A_n^{(\delta)} \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) = \sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma)$ und aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{(1-z)^{\delta} \cdot (1 - 2z\cos\gamma + z^2)^{\frac{\delta}{2}}}$$

folgt nämlich, daß für $\delta \leqq 1$

$$A_n^{(\delta)} \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) = \frac{2}{\pi} \Re \left\{ i \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+1} \cdot dz}{(z-1)^{\delta+1} \cdot \sqrt{T}} - i \cdot (\delta+1) \cdot \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\delta+1} \cdot dz}{(z-1)^{\delta+2} \cdot \sqrt{T}} \right\}$$

$$+ \frac{\sin\delta\pi}{2\pi} \cdot \int_0^1 \frac{(1+u) \cdot u^{n+\delta+1} \cdot du}{(1-u)^{\delta} \cdot (1 - 2u\cos\gamma + u^2)^{\frac{\delta}{2}}},$$

wo $T \equiv 1 - 2z\cos\gamma + z^2$ [6]). Dabei benutzt man die Identität

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+\delta+2}}{(z-1)^{\delta+1} \cdot \sqrt{T}}\right\} + \frac{1}{2} \frac{(1+z) \cdot z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta} \cdot T^{\frac{3}{2}}} \equiv \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta+1} \cdot \sqrt{T}}$$

$$- (\delta+1) \cdot \frac{z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta+2} \cdot \sqrt{T}}.$$

Da aber

$$\sqrt{1 - 2u\cos\gamma + u^2} = \left\{\left[(1-u)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^2 + \left[(1+u)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geqq (1+u)\sin\frac{\gamma}{2},$$

so haben wir einfach

$$\frac{|\sin\delta\pi|}{2\pi} \cdot \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \cdot \int_0^1 \frac{(1+u)\,u^{n+\delta+1} \cdot du}{(1-u)^{\delta} \cdot (1 - 2u\cos\gamma + u^2)^{\frac{\delta}{2}}} \leqq \frac{|\sin\delta\pi|}{2\pi \cdot A_n^{(\delta)} \cdot \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{3}} \cdot \int_0^1 \frac{u^{n+\delta-1} \cdot du}{(1-u)^{\delta}}$$

$$= \frac{|\delta|}{2(n+\delta) \cdot \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{3}}.$$

[6]) Vgl. Gronwall, a. a. O. [2]), S. 329–332.

r $z=(1-u)e^{-i\gamma}$ haben wir

$$|z-1| = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sqrt{1-u+\frac{u^2}{4}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\right)} \geqq 2(1-u)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

d

$$T| = |1-2z\cos\gamma+z^2| = u\cdot|2i\sin\gamma - ue^{-i\gamma}| \geqq 2u\cdot(1-u)\cdot\sin\gamma,$$

o

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{A_n^{(\delta)}}\left|\Re i\cdot\int_0^{e^{-i\gamma}}\frac{z^{n+\delta+1}\cdot dz}{(z-1)^{\delta+1}\cdot\sqrt{T}}\right| \leqq \frac{2}{\pi\cdot A_n^{(\delta)}}\cdot\int_0^1\frac{(1-u)^{n-\frac{1}{2}}\cdot u^{-\frac{1}{2}}\cdot du}{\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\cdot\sqrt{2\sin\gamma}}$$

$$= \frac{2\cdot A_n^{(-\frac{1}{2})}}{A_n^{(\delta)}\cdot\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\cdot\sqrt{2\sin\gamma}}.$$

eraus folgt, daß

$$|s_n^{(\delta)}(\gamma)| \leqq \frac{A_n^{(\frac{1}{2})}}{A_n^{(\delta)}\cdot\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}\cdot\sqrt{2\sin\gamma}} + \frac{2A_n^{(-\frac{1}{2})}}{A_n^{(\delta)}\cdot\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+2}\cdot\sqrt{2\sin\gamma}}$$

$$+ \frac{|\delta|}{2(n+\delta)\cdot\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}}$$

; somit ist die Ungleichung (5) für $\pi \geqq \gamma \geqq \frac{\pi}{n+1}$ bewiesen. Wenn er $\gamma \leqq \frac{\pi}{n+1}$ ist, so können wir in folgender Weise schließen: es ist $+1)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$ und die wohlbekannte Ungleichung

$$|s_n^{(\delta)}(\gamma)| < c_6\cdot(n+1)^2 \qquad \begin{pmatrix}\delta > -1\\ n = 0, 1, 2, \ldots\\ 0 \leqq \gamma \leqq \pi\end{pmatrix}$$

t uns nun

$$|s_n^{(\delta)}(\gamma)| < \frac{c_6(n+1)^2}{\left[(n+1)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^{\delta}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\delta} < \frac{c_7}{(n+1)\cdot\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}} \qquad \left(0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{n+1}\right),$$

mit (5) auch für $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{n+1}$ bewiesen ist.

Um die Ungleichung (6) abzuleiten, bemerken wir, daß aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot\sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+z}{1-2z\cos\gamma+z^2}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{(1-z)^{\delta}}\cdot\sqrt[4]{1-2z\cos\gamma+z^2}}\right\}^2$$

gt:

$$\sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\varrho_{n-m}^{(\delta)}(\gamma),$$

wo

$$\varrho_n^{(\delta)}(\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \tau_m^{(\delta)}(\gamma) \cdot \tau_{n-m}^{(\delta)}(\gamma)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \tau_n^{(\delta)}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1-z)^{\delta}} \cdot \sqrt[4]{1-2z\cos\gamma+z^2}}$$

ist. Der Residuensatz liefert uns den Ausdruck

$$\tau_n^{(\delta)}(\gamma) = \frac{\sin\frac{\delta\pi}{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{n+\frac{\delta-1}{2}} \cdot du}{\sqrt{(1-u)^{\delta}} \cdot \sqrt[4]{1-2u\cos\gamma+u^2}}$$

$$+ \Re\left\{ \frac{1+i}{\pi} \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\frac{\delta-1}{2}} \cdot dz}{\sqrt{(z-1)^{\delta}} \cdot \sqrt[4]{1-2z\cos\gamma+z^2}} \right\}.$$

Im ersten Integral ist

$$T = 1 - 2u\cos\gamma + u^2 \begin{cases} \geqq (1-u)^2, \\ \geqq \sin^2\frac{\gamma}{2}; \end{cases}$$

man hat darum

$$\sqrt[4]{1-2u\cos\gamma+u^2} = \sqrt[4]{T^{\delta}} \cdot \sqrt[4]{T^{1-\delta}} \geqq \sqrt[4]{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2\delta}} \cdot \sqrt[4]{(1-u)^{2-2\delta}}$$

$$= (1-u)^{\frac{1-\delta}{2}} \cdot \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}$$

und folglich

$$\frac{\sin\frac{\delta\pi}{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{n+\frac{\delta-1}{2}} \cdot du}{(1-u)^{\frac{\delta}{2}} \cdot \sqrt[4]{T}} \leqq \frac{\sin\frac{\delta\pi}{2}}{\pi \cdot \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}} \cdot \int_0^1 \frac{u^{n-\frac{1}{2}} \cdot du}{\sqrt{1-u}} \leqq \frac{A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Das zweite Integral läßt sich wie folgt abschätzen: für $z = (1-u)\cdot e^{-i\gamma}$ hat man $|z-1| \geqq \sin\frac{\gamma}{2}$ und $|T| \geqq u^2$ und also

$$\left| \Re\left\{ \frac{1+i}{\pi} \cdot \int_0^{e^{-i\gamma}} \frac{z^{n+\frac{\delta-1}{2}} \cdot dz}{\sqrt{(z-1)^{\delta}} \cdot \sqrt[4]{T}} \right\} \right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left| \int_0^{e^{-i\gamma}} \right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\pi \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}} \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-\frac{1}{2}} \cdot du}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{2} \cdot A_n^{(}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right.}$$

Ferner haben wir

$$|\tau_n^{(\delta)}(\gamma)| \leqq \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}},$$

$$\left|s_n^{(\delta)}(\gamma)\right| \leqq \sum_{m=0}^{n} \left|\tau_m^{(\delta)}(\gamma)\right| \cdot \left|\tau_{n-m}^{(\delta)}(\gamma)\right| \leqq \frac{3+2\sqrt{2}}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}} \cdot \sum_{m=0}^{n} A_m^{(-\frac{1}{2})} \cdot A_{n-m}^{(-\frac{1}{2})} < \frac{6}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta}}$$

d darum

$$\left|\sigma_n^{(\delta)}(\cos\gamma)\right| \leqq \frac{3}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}} \cdot \sum_{m=0}^{n} \left|\sin\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\gamma\right| < \frac{3(n+1)}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta+1}},$$

mit auch die Ungleichung (6) vollständig bewiesen ist.

Nun ist

$$\left|J_n^{(\delta)}(\theta,\varphi)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\gamma \geqq \pi-\varepsilon} F(\theta',\varphi') \cdot s_n^{(\delta)}(\gamma) \cdot d\sigma'\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+1} \geqq \gamma \geqq \pi-\varepsilon} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left|s_n^{(\delta)}(\gamma)\right| \cdot d\sigma' + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\pi \geqq \gamma \geqq \pi-\frac{\pi}{n+1}} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left|s_n^{(\delta)}(\gamma)\right| \cdot d\sigma'$$

$$= j_n' + j_n''.$$

ersten Integral wenden wir die Ungleichung (5) an und erhalten für ses:

$$< \frac{c_3}{2\pi \cdot \left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta+1}} \cdot \iint\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+1} \geqq \gamma \geqq \pi-\varepsilon} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-\frac{1}{2}} \cdot \left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\frac{1}{2}-\delta} \cdot \frac{d\sigma'}{\sqrt{\sin\gamma}}$$

$$+ \frac{c_4}{2\pi(n+1)\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta}} \cdot \iint\limits_{S} \left|F(\theta',\varphi')\right| d\sigma'$$

d folglich

$$j_n' = O\left[\iint\limits_{\frac{n\pi}{n+1} \geqq \gamma \geqq \pi-\varepsilon} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} \cdot d\sigma'\right] + O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

il für $\delta > \frac{1}{2}$ und $\gamma \leqq \pi - \frac{\pi}{n+1}$ ersichtlich $\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{\frac{1}{2}-\delta} = O(1)$ ist.

Wendet man zur Abschätzung des zweiten Integrales die Ungleichung) an, so erhält man hier

$$j_n'' < \frac{c_5}{2\pi\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta+1}} \cdot \iint\limits_{\pi \geqq \gamma \geqq \pi-\frac{\pi}{n+1}} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{1-\delta} \cdot \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} \cdot d\sigma'$$

$$= O\left[\iint\limits_{\pi \geqq \gamma \geqq \frac{n\pi}{n+1}} \left|F(\theta',\varphi')\right| \cdot \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-1} \cdot d\sigma'\right],$$

il für $\delta < 1$ und $\gamma \geqq \pi - \frac{\pi}{n+1}$ wieder $\left[(n+1)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^{1-\delta} = O(1)$ ist.

Wenn wir diese Resultate addieren, bekommen wir einfach

$$J_n^{(\delta)}(\theta', \varphi) = O\Big[\iint\limits_{\gamma \geqq \pi-\varepsilon} |F(\theta', \varphi')| \cdot \Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot d\sigma'\Big] + O\Big(\frac{1}{n+1}\Big).$$

Da $|F(\theta', \varphi')| \cdot \Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1}$ nach der Voraussetzung auf S integrierbar ist, so haben wir für ein genügend kleines ε und $n \geqq N = N(\varepsilon, \zeta)$

$$|J_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)| < \zeta,$$

wo ζ beliebig klein ist. Daraus folgt[7]) aber für $\delta > \frac{1}{2}$ die $(C\,\delta)$-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe und somit folgender Satz:

II. *Es sei das Produkt* $\Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot F(\theta', \varphi')$ *für* $\frac{1}{2} < \delta < 1$ *absolut integrierbar auf der Kugel* S, *wenn* γ *die sphärische Distanz der Punkte* (θ, φ) *und* (θ', φ') *bedeutet. Dann ist die Laplacesche Reihe* (1) *der Funktion* $F(\theta', \varphi')$ (C, δ)*-summierbar im Punkte* (θ, φ), *falls der Mittelwert* $F_0(\theta, \varphi)$ *der Funktion* $F(\theta', \varphi')$ *in diesem Punkte* (θ, φ) *existiert; ihre Summe ist gleich diesem Mittelwerte*[8]). *Die Summierbarkeit ist gleichmäßig in jedem Bereiche* Δ, *der ganz im Innern des Stetigkeitsbereiches der Funktion* $F(\theta', \varphi')$ *liegt, falls die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit des Produktes* $\Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot F(\theta', \varphi')$ *auf* S *für alle Punkte dieses Bereiches* Δ *erfüllt ist.*

Nun ist es klar, daß die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit des Produktes $\Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot F(\theta', \varphi')$ jedenfalls erfüllt ist, wenn die auf der Kugel S absolut integrierbare Funktion $F(\theta', \varphi')$ im Punkte $(\pi-\theta, \varphi+\pi)$, d. h. für $\gamma = \pi$ von der Ordnung s unendlich wird und $\delta > s - 1$ vorausgesetzt ist, denn man hat

$$\iint\limits_S \Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot |F(\theta', \varphi')| \cdot d\sigma' = \iint\limits_{\gamma \leqq \pi-\varepsilon} + \iint\limits_{\gamma \geqq \pi-\varepsilon}$$

$$\leqq \Big(\cos\frac{\pi-\varepsilon}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot \iint\limits_{\gamma \leqq \pi-\varepsilon} |F(\theta', \varphi')| \cdot d\sigma' + \iint\limits_{\gamma \geqq \pi-\varepsilon} \frac{|F_1(\theta', \varphi')|}{\Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^s} \cdot \Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-1} \cdot \sin\gamma \cdot d\gamma \cdot d\psi$$

$$= O\Big[\iint\limits_S |F(\theta', \varphi')| \cdot d\sigma'\Big] + O\Big[\int\limits_0^\pi \Big(\cos\frac{\gamma}{2}\Big)^{\delta-s} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot d\gamma\Big] = O(1).$$

---

[7]) Gronwall, a. a. O. [2]), S. 357; Hauptsatz I.

[8]) Vgl. Gronwall, a. a. O. [2]); S. 358.

Also wir haben das Korollar:

III. *Die Laplacesche Reihe einer auf der Kugel S absolut integrierbaren Funktion* $F(\theta', \varphi')$ *ist* $(C\delta)$*-summierbar im Punkte* (θ, φ) *für jedes* $\delta > \frac{1}{2}$, *wenn die Funktion* $F(\theta', \varphi')$ *im Gegenpol* $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ *von der Ordnung* $s \leqq \frac{3}{2}$ *unendlich wird, und* $(C\delta)$*-summierbar für* $\delta > s - 1$, *wenn* $2 > s > \frac{3}{2}$ *ist. Ihre Summe ist gleich dem Mittelwerte der entwickelten Funktion im Punkte* (θ, φ).

Der Spezialfall $F(\theta', \varphi') = f(\cos\theta') = f(x)$ und $\theta = 0$ $[\theta = \pi]$ liefert uns den Satz:

IV. *Es sei das Produkt* $(1+x)^{\frac{\delta-1}{2}} \cdot f(x)$ $[$*oder* $(1-x)^{\frac{\delta-1}{2}} \cdot f(x)]$ *für* $\frac{1}{2} < \delta < 1$ *absolut integrierbar im Intervalle* $(-1, +1)$. *Dann ist die Legendresche Reihe der Funktion* $f(x)$ *im Punkte* $x = +1$ $[$*oder* $x = -1]$ *mit der Summe* $f(1-0)$ $[$*oder* $f(0-1)]$ $(C\delta)$*-summierbar, falls der Grenzwert* $f(1-0)$ $[f(0-1)]$ *existiert.*

Daraus folgt, daß die Legendresche Reihe einer im Intervalle $(-1, +1)$ absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ in dem Endpunkte $x = +1$ $[x = -1]$ mit der Summe $f(1-0)$ $[f(0-1)]$ $(C\delta)$-summierbar ist für jedes $\delta > \frac{1}{2}$, falls $f(x)$ in dem anderen Endpunkte $x = -1$ $[x = +1]$ von der Ordnung $s \leqq \frac{3}{4}$ unendlich wird; ist $1 > s > \frac{3}{4}$, so ist die Legendresche Reihe im Punkte $x = +1$ $[x = -1]$ $(C\delta)$-summierbar für $1 > \delta > 2s - 1$.

(Eingegangen am 1. April 1920.)

Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise.

Von

A. Cohn in Berlin.

Das Problem, die Anzahl der im Innern eines Kreises gelegenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen, wird durch die Cauchysche Index- oder Kroneckersche Charakteristikentheorie auf die Ermittlung der Anzahl der reellen Wurzeln einer anderen Gleichung zurückgeführt[1]). Für den einfachsten und wichtigsten Fall des Kreises $|x| < R$, auf den man sich offenbar beschränken darf, gibt es aber eine Reihe von Methoden, die unter gewissen Voraussetzungen die Anzahl der in dem Kreise enthaltenen Wurzeln auf einfachere Art aufzufinden gestatten.

Außer einer Regel für trinomische Gleichungen von Herrn P. Bohl[2]) sind hier vor allem einige Noten von Herrn M. Petrovitsch[3]) zu nennen, der von der Voraussetzung ausgeht, daß man schon einen wurzelfreien Kreisring $R < |x| < R_1$ kennt.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die absoluten Beträge der Wurzeln sämtlich unterhalb einer gegebenen Schranke liegen, hat Herr I. Schur[4]) abgeleitet. Die im I. Kapitel dieser Arbeit mitgeteilte Regel, die mit verhältnismäßig geringer Mühe die Zahl der im

[1]) Nach Ausführung einer linearen Transformation könnte man auch die von Routh („Die Dynamik der Systeme starrer Körper", deutsche Ausgabe, Leipzig 1898, 2, §§ 290–307) sowie von Chipart und Liénard (C. R. 157 (1913), S. 837–840) für die Halbebene entwickelten Methoden anwenden.

[2]) Math. Ann. 65 (1908), S. 556–566.

[3]) C. R. 129 (1899), S. 583 u. 873; Bull. de la Société Math. de France 36 (1908), S. 141–150.

[4]) „Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind", Journ. f. Math. 147 (1917), S. 205–232, vgl. auch S. 387 des Aufsatzes: „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten", Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 377–402.

nern und die Anzahl der auf dem Rande eines Kreises gelegenen Wurzeln ermitteln gestattet, ist nur als eine Erweiterung seines Kriteriums zu trachten.

Das Hauptresultat des II. Kapitels ist, daß die Anzahl der Wurzeln r Gleichung

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

ren absolute Beträge kleiner als 1 sind, durch die Zahl der positiven adrate dargestellt wird, die die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H} = \sum_{\lambda=1}^{n} |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} x_n|^2$$

der Normalform besitzt. Für den Fall, daß sich alle Wurzeln im nern des Einheitskreises befinden, hat Herr I. Schur dieses Ergebnis rch funktionentheoretische Überlegungen aufgefunden[5]).

Im III. Kapitel gebe ich einen Beweis eines im wesentlichen schon n Herrn Grace[6]) herrührenden Kompositionssatzes für Gleichungen, ren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, und einen aus unmittelbar folgenden Beweis eines Kompositionssatzes von Herrn Egerváry[7]) für Gleichungen mit nur reellen Wurzeln.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Professor I. Schur für ne Anregungen und für seinen Rat bei der Abfassung dieser Arbeit inen herzlichsten Dank auszusprechen.

Inhaltsverzeichnis.

. Kapitel: Regel zur Ermittlung der Wurzelanzahl im Einheitskreise.

§ 1. Die Regel.
§ 2. Beweise.
§ 3. Anwendungen.

. Kapitel: Die zu einem Polynom gehörende Hermitesche Form $\mathfrak{H}$.

§ 4. Darstellung der Wurzelanzahl durch $\mathfrak{H}$.
§ 5. Hilfssätze über Hermitesche Formen und Determinanten.

[5]) Vgl. die (im Journ. f. Math. **148** (1918), S. 122–145 erschienene) Fortsetzung ersten in der vorigen Fußnote zitierten Abhandlung, besonders S. 134–137.

[6]) Proc. Cambridge Phil. Society **11** (1902), S. 352–357. Einen anderen Beweis Herr G. Szegö gegeben (Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 28–55).

[7]) Erscheint demnächst.

§ 6. Die Resultante von g und g^*.
§ 7. Sturmsche Kette für die absoluten Beträge der Wurzeln.
§ 8. Eine Anwendung des Satzes I.
III. Kapitel: Kompositionssätze.
§ 9. Satz von Grace.
§ 10. Satz von Egerváry.

I. Kapitel.

Regel zur Ermittlung der Wurzelanzahl im Einheitskreise.

§ 1.

Die Regel.

1. Vorgelegt sei die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

und man setze

$$f^*(x) = x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0.$$

Ist nun

I. *Fall*:

$$|a_0| > |a_n|,$$

so bilde man

$$\bar{a}_0 f(x) - a_n f^*(x) = x f_1(x) = 0.$$

Die Gleichung (1) *hat dann eine Wurzel mehr im Innern des Einheitskreises als die Gleichung* $(n-1)$*-ten Grades*

$$f_1(x) = 0.$$

Ist aber

II. *Fall*:

$$|a_0| < |a_n|,$$

so bilde man

$$\bar{a}_n f(x) - a_0 f^*(x) = f_1(x) = 0.$$

Diese Gleichung höchstens $(n-1)$*-ten Grades besitzt im Innern des Einheitskreises ebenso viele Wurzeln wie die Gleichung* (1).

Ist endlich $|a_0| = |a_n|$, so müssen zwei Fälle unterschieden werden.

III. *Fall*:

$$a_0 = \varepsilon \bar{a}_n, \quad a_1 = \varepsilon \bar{a}_{n-1}, \ldots, a_{k-1} = \varepsilon \bar{a}_{n-k+1} \quad \left(|\varepsilon| = 1;\ k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

aber

$$a_k \neq \varepsilon \bar{a}_{n-k}.$$

Man setze dann

$$\frac{a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k}}{a_0} = b$$

d *wende auf die Gleichung*

$$\left(x^k + 2\frac{b}{|b|}\right) f(x) = 0$$

unter II *vorgeschriebene Operation an.* Man erhält dann sofort eine eichung n-ten Grades, die unter I gehört und im Innern des Einheitsises die gleiche Anzahl Wurzeln besitzt wie die Gleichung (1).

IV. *Fall*:

$$a_\nu = \varepsilon \bar{a}_{n-\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ |\varepsilon| = 1).^{8})$$

In diesem Fall hat die Gleichung

$$x) = x^{n-1} f'\left(\frac{1}{x}\right) = a_{n-1}x^{n-1} + 2a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + (n-1)a_1 x + n a_0 = 0$$

nso viele Wurzeln im Innern des Einheitskreises wie die Gleichung (1).

2. Wendet man dieselbe Regel auf $f_1(x) = 0$ an, so gelangt man einer Gleichung höchstens $(n-2)$-ten Grades $f_2(x) = 0$ usf., bis man ch höchstens $n-1$ Schritten auf eine Gleichung stößt, von der man iß, wie viele Wurzeln sie im Innern des Einheitskreises besitzt.

3. Die *Anzahl der auf dem Rande des Einheitskreises genden Wurzeln* erhält man folgendermaßen:

Ist die Gleichung s-ten Grades

$$f_\sigma(x) = 0$$

erste unter IV *fallende Gleichung, auf die man bei Anwendung unserer gel stößt, und hat*

$$f_{\sigma+1}(x) = x^{n-1} f_\sigma'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Wurzeln im Innern des Einheitskreises, so besitzt die Gleichung (1) *und auch* $f_\sigma(x) = 0$ —

$$t_1 = s - 2l$$

urzeln vom absoluten Betrage 1.

4. Stellt sich bei Anwendung unserer Regel heraus, daß die zweite er IV fallende Gleichung, auf welche die Regel führt, t_2 Wurzeln vom oluten Betrage 1 besitzt, so hat die Gleichung (1) *mindestens* $t_1 - t_2$ einander *verschiedene Wurzeln auf der Peripherie des Einheitskreises.*

---

[8]) Bei *reellen* Koeffizienten: *Reziproke Gleichung.*

§ 2.

Beweise.

1. Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel beruht auf einem oft gebrauchten

Hilfssatz[9]). *Ist auf dem Rande eines Kreises K beständig*

$$|\varphi(x)| > |\psi(x)|, \tag{2}$$

so verschwinden die beiden Polynome

$$\varphi(x)$$

und

$$\varphi(x) + \psi(x)$$

im Innern von K gleich oft.

Dieser auch noch für allgemeinere Bereiche und beliebige analytische Funktionen gültige Satz pflegt mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen zu werden, er ergibt sich aber auch sehr leicht aus der Stetigkeit der Wurzeln.

Versteht man nämlich unter λ einen der Bedingung

$$|\lambda| \leqq 1$$

unterworfenen Parameter, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_\lambda(x) = \varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0$$

stetige Funktionen des Parameters λ. Die Anzahl der in K gelegenen Wurzeln dieser Gleichung könnte sich infolgedessen nur dadurch ändern, daß mindestens eine Wurzel die Peripherie des Kreises K überschreitet. Das ist aber nicht möglich. Denn wäre für einen Randpunkt x_1 von K und für

$$|\lambda_1| \leqq 1$$

$$\Phi_{\lambda_1}(x_1) = \varphi(x_1) + \lambda_1\psi(x_1) = 0,$$

so würde daraus folgen

$$|\varphi(x_1)| \leqq |\psi(x_1)|,$$

im Widerspruch mit der dem Satze zugrunde liegenden Voraussetzung (2). Die Polynome

$$\Phi_0(x) = \varphi(x)$$

und

$$\Phi_1(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

haben daher im Innern von K die gleiche Anzahl von Nullstellen.

[9]) Man vgl. Rouché, „Mémoire sur la série de Lagrange", Journal de l'école polytechnique 22 (Heft 39), (1862), S. 217–218.

2. Die Gleichungen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$f^*(x) = x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0 = 0$$

itzen dieselben Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ vom absoluten Betrage 1. Setzt n

$$\prod_{i=1}^{\nu} (x - \alpha_i) = \chi(x)$$

d

$$f(x) = \chi(x) \cdot F(x),$$

$$f^*(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (-\bar{\alpha}_i) \cdot \chi(x) \cdot F^*(x),$$

ist für $|x| = 1$

$$|F(x)| = \left| x^{n-\nu} F\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |F^*(x)| \neq 0.$$

nn daher $|\lambda| < 1$ ist, so hat man auf dem Rande des Einheitskreises

$$|F(x)| > |\lambda F^*(x)|,$$

ier verschwinden die Polynome

$$F(x),$$
$$F(x) + \lambda F^*(x)$$

h dem eben bewiesenen Hilfssatz im Innern des Einheitskreises gleich Die Zahl dieser Nullstellen ändert sich nicht, wenn man mit $\chi(x)$ ltipliziert. Damit erhalten wir das Resultat:

Für $|\lambda| < 1$ *haben die beiden Gleichungen*

$$f(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f(x) + \lambda f^*(x) = 0$$

gleiche Anzahl Wurzeln im Innern des Einheitskreises.

Aus diesem Satze ergibt sich die Regel des vorigen Paragraphen für Fälle

$$|a_0| > |a_n| \qquad \text{und}$$
$$|a_0| < |a_n|$$

nittelbar. Ist aber $|a_0| = |a_n|$, so liegt es nahe, die Gleichung (1) einem Faktor zu multiplizieren, dessen Wurzeln nicht im Einheitskreis en, durch den aber aus der Gleichung (1) eine unter I oder II fallende ichung entsteht.

3. Bestehen zwischen den Koeffizienten der Gl. (1) die Relationen

$$a_0 = \varepsilon \bar{a}_n, \qquad a_1 = \varepsilon \bar{a}_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_{k-1} = \varepsilon \bar{a}_{n-k+1},$$

aber

$$a_k + \varepsilon \bar{a}_{n-k}$$
$$k \leqq \left[\frac{n}{2}\right], \quad |\varepsilon| = 1 \quad \text{(Fall III)},$$

so wird

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^k + \gamma) f(x) \qquad (|\gamma| > 1) \\ &= \varepsilon \bar{a}_n x^{n+k} + \varepsilon \bar{a}_{n-1} x^{n+k-1} + \ldots + \varepsilon \bar{a}_{n-k+1} x^{n+1} \\ &+ (\gamma \varepsilon \bar{a}_n + a_k) x^n + \ldots + (\gamma a_{n-k} + a_n) x^k \\ &+ \gamma a_{n-k+1} x^{k-1} + \ldots + \gamma a_n = 0 \end{aligned}$$

eine zu II gehörige Gleichung, die im Innern des Einheitskreises (und auch auf seiner Peripherie) ebenso viele Wurzeln besitzt wie $f(x) = 0$. Nach II hat man zu bilden

$$\begin{aligned} g(x) &= \bar{\gamma} \bar{a}_n G(x) - \varepsilon \bar{a}_n G^*(x) \\ &= \bar{a}_n \{[(\gamma \bar{\gamma} - 1) \varepsilon \bar{a}_n + \bar{\gamma}(a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k})] x^n + \ldots + (\gamma \bar{\gamma} - 1) a_n\}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$b = \frac{a_k - \varepsilon \bar{a}_{n-k}}{\varepsilon \bar{a}_n} \neq 0$$

und wählt

$$\gamma = \frac{2b}{|b|},$$

so erhält man

$$\frac{1}{\bar{a}_n} g(x) = (3 + 2|b|) a_0 x^n + \ldots + 3 a_n = 0,$$

und diese Gleichung n-ten Grades, die ebenso viele Wurzeln im Einheitskreis besitzt wie Gleichung (1), läßt sich nach dem I. Teil unserer Regel reduzieren.

Existiert kein Index k, für den $a_k + \varepsilon \bar{a}_{n-k}$ ist, so führt der eben benutzte Kunstgriff nicht zum Ziel, denn es ist dann

$$\bar{a}_n f(x) - a_0 f^*(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Wir kommen damit zu Fall IV.

4. Ich beweise zunächst den folgenden

Hilfssatz. *Zu jedem Polynom $\varphi(x)$ gibt es eine (beliebig klein wählbare) reelle Zahl*

$$\xi > 0,$$

so daß das Polynom

$$\varphi_\xi(x) = \varphi(x) - \xi x \varphi'(x)$$

im Innern des Einheitskreises genau ebensooft verschwindet wie $\varphi(x)$.

Liegt keine Nullstelle von $\varphi(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises, so ist dieser Hilfssatz trivial. Es kommt aber darauf an, zu zeigen, daß die auf der Peripherie gelegenen Nullstellen, solange ξ hinreichend klein bleibt, nicht in das Innere des Einheitskreises hineinrücken.

Sei α eine ν-fache Wurzel von $\varphi(x) = 0$, dann ist also

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^{\nu}\psi(x) \qquad (\psi(\alpha) \neq 0)$$

l

$$\varphi_\xi(x) = \varphi(x) - \xi x\varphi'(x) = (x-\alpha)^{\nu-1}h(x),$$

bei

$$h(x) = [(1-\nu\xi)x - \alpha]\psi(x) - \xi x(x-\alpha)\psi'(x)$$

etzt ist. $\varphi_\xi(x) = 0$ besitzt die Wurzel α $(\nu-1)$-fach. Ich werde gen, daß die ν-te α entsprechende Wurzel dieser Gleichung für kleine erte von ξ im Kreis K_ξ mit dem Mittelpunkt

$$(1+\nu\xi)\alpha$$

d dem Radius

$$\frac{|\alpha|}{2}\xi$$

gt, woraus folgt, daß sie von größerem absoluten Betrage als α ist.

Man wähle zunächst ξ so klein, daß $\psi(x)$ nur außerhalb von K_ξ verwindet und die Wurzel

$$\frac{\alpha}{1-\nu\xi} = (1+\nu\xi)\alpha + \frac{\alpha\nu^2\xi^2}{1-\nu\xi}$$

r Gleichung

$$[(1-\nu\xi)x - \alpha]\psi(x) = 0$$

nerhalb des Kreises K_ξ liegt. Diese Gleichung besitzt dann also genau ne Wurzel in K_ξ. Um nun nachzuweisen, daß das Polynom (4) in genau einmal verschwindet, genügt es zu zeigen, daß für kleine Werte n ξ auf dem Rande von K_ξ, also für

$$x = (1+\nu\xi)\alpha + \varepsilon\xi \qquad \left(\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}e^{i\varphi}\right),$$

$$|\{(1-\nu\xi)x - \alpha\}\psi(x)| > |\xi x(x-\alpha)\psi'(x)|$$

. Danach müßte sein

$$|(1-\nu\xi)[(1+\nu\xi)\alpha + \varepsilon\xi] - \alpha\}\psi| > |\xi^2[(1+\nu\xi)\alpha + \varepsilon\xi](\nu\alpha+\varepsilon)\psi'|$$

ler

$$|[\varepsilon - \nu(\nu\alpha+\varepsilon)\xi]\psi| > \xi|[(1+\nu\xi)\alpha + \varepsilon\xi](\nu\alpha+\varepsilon)\psi'|,$$

nd das läßt sich durch genügend kleine Wahl von $\xi > 0$ tatsächlich reichen.

5. Sei nun $f(x) = 0$ eine Gleichung, für die die Identität (3) gilt. ach dem eben bewiesenen Hilfssatz gibt es eine positive Zahl $\xi < \frac{1}{n}$, daß die Gleichung

$$f(x) - \xi x f'(x) = (1-n\xi)a_0x^n + \ldots + a_n = 0$$

im Innern des Einheitskreises dieselbe Anzahl Wurzeln besitzt wie $f(x) = 0$. Die Gleichung (5) gehört, da

$$|a_0| = |a_n|, \quad \text{also} \quad (1 - n\xi)|a_0| < |a_n|$$

ist, unter II. Infolgedessen hat die Gleichung

$$(6) \quad \varphi(x) = \bar{a}_n [f(x) - \xi x f'(x)] - (1 - n\xi) a_0 [f(x) - \xi x f'(x)]^* = 0$$

innerhalb des Einheitskreises die nämliche Anzahl Wurzeln wie

$$f(x) = 0.$$

Man erhält nach einigen auf der Identität (3) beruhenden Umformungen[10]

$$\varphi(x) = a_0 \xi (2 - n\xi) f'^*(x).$$

Damit ist also bewiesen:

Im Fall IV *haben* $f(x) = 0$ *und* $f'^*(x) = 0$ *im Innern des Einheitskreises die gleiche Anzahl Wurzeln.*

Da die Wurzeln der Gleichung

$$(7) \quad x^{n-1} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

aus denen von

$$f'^*(x) = x^{n-1} \bar{f}'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

durch Übergang zu den konjugiert komplexen Werten entstehen, kann auch die Gleichung (7) zur Ermittelung der Wurzelzahl der Gleichung (1) dienen.

6. Wir wenden uns jetzt zur Rechtfertigung der Regel für die Zahl der Nullstellen auf dem *Rande* des Einheitskreises.

Aus den Überlegungen in 2 geht hervor, daß in den Fällen I bis III $f(x) = 0$ und $f_1(x) = 0$ für $|x| = 1$ dieselben Wurzeln besitzen. Solange sich daher die Reduktion der vorgelegten Gleichung nach den Vorschriften I bis III vollzieht, kann man die neu entstehenden Gleichungen statt der ursprünglichen der Rechnung zugrunde legen.

---

[10] Die Rechnung soll hier vollständig durchgeführt werden. Zunächst ist

$$[f(x) - \xi x f'(x)]^* = \bar{a}_n x^n + (1 - \xi)\bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + (1 - n\xi)\bar{a}_0 = f^*(x) - \xi f'^*(x),$$

so daß man für (6) erhält

$$\bar{a}_n [f(x) - \xi x f'(x)] - (1 - n\xi) a_0 [f^*(x) - \xi f'^*(x)]$$
$$= \bar{a}_n f(x) - a_0 f^*(x) + \xi [n a_0 f^*(x) - \bar{a}_n x f'(x)] + \xi a_0 f'^*(x) - \xi^2 n a_0 f'^*(x).$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck läßt sich folgendermaßen umformen:

$$n a_0 f^*(x) - \bar{a}_n x f'(x) = a_0 \{\bar{a}_{n-1} x^{n-1} + 2\bar{a}_{n-2} x^{n-2} + \ldots + n\bar{a}_0\}$$
$$= a_0 f'^*(x).$$

Gleichung (6) nimmt daher die Form an:

$$\varphi(x) = a_0 \xi (2 - n\xi) f'^*(x).$$

Sei nun die Gleichung s-ten Grades

$$f_\sigma(x) = 0$$

e erste unter IV gehörende Gleichung, zu der man gelangt. Besitzt sie e Wurzel α, so ist auch $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ eine Wurzel. Die Gleichung (8) hat daher enso viele Wurzeln im Innern des Einheitskreises wie außerhalb desselben. t l die nach Vorschrift IV usw. berechnete Anzahl der im Innern gele- enen Wurzeln, so müssen, da die Gleichung (8) im ganzen s Wurzeln hat,

$$t_1 = s - 2l$$

n ihnen auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Zur Bestimmung von l wird nach IV die Gleichung

$$f_{\sigma+1} = x^{s-1} f_\sigma'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

nutzt, an deren Stelle auch

$$f_\sigma'^*(x) = x^{s-1} f_\sigma'\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{f}_{\sigma+1} = 0$$

eten kann. Die Gleichung (9) hat dieselben Wurzeln vom absoluten etrage 1 wie

$$f_\sigma'(x) = 0.$$

ie mehrfachen auf dem Rande gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ommen daher — in einer um eine Einheit verminderten Vielfachheit — nter denen der Gleichung (9) vor. Besitzt also die Gleichung (9) t_2 urzeln vom absoluten Betrage 1, so beträgt die Anzahl N der verschie- enen, auf dem Rande liegenden Wurzeln von (1) mindestens $t_1 - t_2$. Soll

$$N = t_1 - t_2$$

in, so muß jede auf der Peripherie gelegene Wurzel von (9) auch die leichung (1) befriedigen.

§ 3.

Anwendungen.

1. *Jede Gleichung, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheits- eises liegen, möge kurz als Gleichung der Klasse K („K-Gleichung") zeichnet werden.*

Aus dem I. Teil unserer Regel aus § 1 ergibt sich unmittelbar ein on Herrn I. Schur herrührender Satz:

Dann und nur dann gehört die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

zur Klasse K, wenn die Gleichung

$$(10)\quad f_1(x)=\frac{1}{x}\left(\bar{a}_0 f(x)-a_n x^n \bar{f}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=a_0^{(1)}x^{n-1}+a_1^{(1)}x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}^{(1)}=$$

dieselbe Eigenschaft besitzt und

$$(11)\qquad |a_0|>|a_n|$$

ist.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten der Gleichung (1) eine monoton abnehmende Folge reeller, positiver Zahlen bilden:

$$(12)\qquad a_0>a_1>\ldots>a_{n-1}>a_n>0.$$

Die Bedingung (11) ist dann erfüllt. Da aus (12) folgt

$$-a_n>-a_{n-1}>\ldots>-a_1>-a_0,$$

so werden die Koeffizienten

$$a_\nu^{(1)}=a_0a_\nu-a_na_{n-\nu}\qquad(\nu=0,1,\ldots,n-1)$$

der Gleichung (10) wieder eine Folge positiver, monoton abnehmender Zahlen bilden:

$$a_0^{(1)}>a_1^{(1)}>\ldots>a_{n-2}^{(1)}>a_{n-1}^{(1)}>0.$$

Damit ist aber gezeigt:

Genügen die Koeffizienten den Ungleichungen (12), *so ist* (1) *eine K-Gleichung.*

Es ist das der durch eine funktionentheoretische Anwendung bekannt gewordene Satz von Kakeya[11]).

2. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen

$$(1)\qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzt.

Zunächst kann die Gleichung nicht zu den unter I bis III behandelten Gleichungen gehören, da sonst mindestens eine Wurzel im Innern oder außerhalb des Einheitskreises liegen würde. Es muß also Fall IV vorliegen, d. h. es müssen zwischen den Koeffizienten die Relationen bestehen:

$$(13)\qquad a_\nu=\varepsilon\bar{a}_{n-\nu}\qquad(|\varepsilon|=1,\quad\nu=0,1,\ldots,n).$$

Ferner darf keine Wurzel von

$$x^{n-1}f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

[11]) Vgl. E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie", Berlin 1916, S. 20.

solut genommen kleiner als 1 sein, da sonst nach IV eine Wurzel im nern vorhanden wäre. Zu den Bedingungen (13) tritt also hinzu, daß Wurzeln

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

r derivierten Gleichung

$$f'(x) = 0$$

r Bedingung

4) $$|x_i| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

nügen müssen. Andererseits übersieht man auf Grund der zur Bestimung der Wurzelanzahl auf der Peripherie des Einheitskreises entwickelten egel, daß die Gleichung (1) unter den Bedingungen (13) und (14) wirkh nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzt.

Nach einem bekannten Satz von Gauß[12]) liegen die Nullstellen x_i r Ableitung $f'(x)$ in dem kleinsten konvexen Polygon, das die Wurzeln r Gleichung (1) umspannt. Es wird daher nur

$$|x_i| = 1$$

n können, wenn zugleich

$$f(x_i) = 0$$

. Wird angenommen, daß die Gleichung (1) keine mehrfachen Wurzeln sitzt, so kann daher in (14) das Gleichheitszeichen nicht auftreten. Wir halten damit ein von Herrn I. Schur auf funktionentheoretischem Wege geleitetes Resultat[13]):

Dann und nur dann hat

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

uter (voneinander verschiedene) Wurzeln vom absoluten Betrage 1, *wenn e Koeffizienten den Bedingungen genügen*

$$a_0 \bar{a}_\nu = \bar{a}_n a_{n-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

d wenn die Ableitung

$$f'(x) = 0$$

r Klasse K gehört.

3. Die in § 1 entwickelte Regel soll noch auf einige numerische ispiele angewandt werden.

Man merke sich für die Rechnung, daß $f(x)$ mit dem (absolut genommen) größeren der beiden äußeren Koeffizienten multipliziert und darauf $f^*(x)$, mit dem kleineren multipliziert, davon abgezogen werden muß.

Gemeinschaftliche Faktoren von a_0 und a_n können bei der Multiplikation natürlich von vornherein unterdrückt werden.

---

[12]) Werke 3, S. 112; vgl. etwa Osgood, Funktionentheorie. 2. Aufl., S. 210.

[13]) Auf S. 136 der in Fußnote [5]) zitierten Abhandlung.

Beginnen wir mit der trinomischen Gleichung 10. Grades

$$2x^{10} + 3x^3 + 4 = 0.$$

	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
f:	2	0	0	0	0	0	0	3	0	0	4
	4							6			8
	−4			−3							−2
f_1:				−1				2			2
				−2				4			4
				2			2				−1
f_2:							2	4			3
							6	12			9
							−6			−8	−4
f_3:								12		−8	5
								144		−96	60
								−25	40		−60
f_4:								119	40	−96	*
								119^2	119×40	119×-96	
								-96^2	96×40	119×96	
f_5:								23	40	*	*
f_6:									1	*	*

Die Gleichung besitzt also zwei Wurzeln im Einheitskreis, keine auf seinem Rande. Zu demselben Ergebnis für die Anzahl der im Innern

des Einheitskreises liegenden Wurzeln unserer trinomischen Gleichung führt auch die in der Einleitung erwähnte Regel von Herrn Bohl.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$f(x) = x^8 - 2x^7 - 4x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Man erhält nacheinander

	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
f:	1	−2	−4	6	2	−6	5	4	−2
f_1: $(s=6)$			1	−2	−2	2	−2	−2	1
$f_2 = x^5 f_1'\left(\frac{1}{x}\right)$				−1	−2	3	−4	−5	3
f_3:					−11	5	−9	−17	8
f_4:					19	27	57	49	*
f_5:						2	19	17	*
f_6:							1	1	*

Die Gleichung hat also eine einzige Wurzel, deren absoluter Betrag <1 ist. $f_1 = 0$ ist die erste Gleichung vom Typus IV (reziproke Gleichung); ihr Grad ist $s = 6$, die Anzahl ihrer Wurzeln im Einheitskreis $l = 1$. $f(x)$ besitzt also

$$s - 2l = 4$$

Nullstellen vom absoluten Betrage 1, darunter die Wurzel

$$x = -1$$

zweifach, da dieser Wert außer $f_6 = 0$ auch $f_1 = 0$ befriedigt. In der Tat ist

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 1)(x^3 + 1)(x + 1).$$

Die Rechnung kann mitunter durch ein einfaches Kriterium erheblich abgekürzt werden, das aus dem Hilfssatz in § 2, 1 unmittelbar hervorgeht[14]):

Ist in der Gleichung

$$g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = 0$$

$$|c_\nu| > |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_{\nu-1}| + |c_{\nu+1}| + |c_{\nu+2}| + \ldots + |c_n|,$$

[14]) Einen anderen Beweis gab D. E. Mayer, Nouv. Ann. math. (13) X (1891), S. 111–118.

so besitzt die Gleichung ν Wurzeln im Innern des Einheitskreises (und keine auf seinem Rande).

Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0,$$

die nach III behandelt werden muß. Man findet aus

$$(x+2)\varphi(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

durch Reduktion

$$\psi(x) = -x^3 + \underline{\underline{12}}\,x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung $\varphi(x) = 0$ liegen daher innerhalb des Einheitskreises, die dritte außerhalb.

4. Schließlich soll noch eine Gleichung behandelt werden, deren Koeffizienten von einem Parameter abhängen:

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(x - \tfrac{1}{x^2}\right) - (1-\mu)\left(y - \tfrac{1}{y^2}\right) &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

oder

$$(15) \qquad x^5 + (-3+\mu)x^4 + (3-2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0.$$

Es ist das die erste Librationsgleichung im Dreikörperproblem. Ihre (einzige) zwischen 0 und 1 gelegene reelle Wurzel liefert den Sonnenabstand des zwischen Sonne und Planeten gelegenen Librationspunktes. Dabei ist die Entfernung Sonne - Planet $= 1$, die Masse des Planeten $= \mu$, die Sonnenmasse $= 1 - \mu$ gesetzt. Dementsprechend ist μ in Gleichung (15) als ein reeller, auf das Intervall

$$(16) \qquad 0 < \mu < 1$$

beschränkter Parameter anzusehen. Die Durchführung der in § 1 entwickelten Regel liefert die Folge von Gleichungen (allen Koeffizienten gemeinsame Faktoren sind weggehoben):

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
1	$-3+\mu$	$3-2\mu$	$-\mu$	2μ	$-\mu$
$1+\mu$	$-3-2\mu$	$3+\mu$	2μ	$-\mu$	*
$1+2\mu$	$-3-5\mu$	$3+7\mu+2\mu^2$	$-\mu$	*	*
$1+3\mu$	$-3-5\mu+2\mu^2$	$3+7\mu+4\mu^2$	*	*	*
*	$-3-5\mu+2\mu^2$	$4+10\mu+4\mu^2$	*	*	*
*	*	1	*	*	*

d damit das Resultat:

Die erste Librationsgleichung (15) *besitzt für alle Werte des auf das tervall* (16) *beschränkten Parameters eine reelle und ein Paar konjugiert mplexer Wurzeln im Innern des Einheitskreises und keine auf dem Rande.*

II. Kapitel.

ie zu einem Polynom gehörende Hermitesche Form $\mathfrak{H}$.

§ 4.

Darstellung der Wurzelanzahl durch $\mathfrak{H}$.

1. In der schon in der Einleitung erwähnten Abhandlung „Über tenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind", erhält err I. Schur aus seiner auf einem kettenbruchartigem Algorithmus behenden Theorie nebenbei den folgenden algebraischen Satz[15]):

I. „*Die Nullstellen des Polynoms n-ten Grades*

7) $$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

nd dann und nur dann sämtlich im Innern des Einheitskreises gelegen, enn die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H} = \sum_{\lambda=1}^{n} |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} x_n|^2$$

ositiv definit ist, oder was dasselbe ist, wenn die n Determinanten

$$\delta_\nu = \begin{vmatrix} a_n, & 0, & \ldots, 0, & a_0, & a_1, & \ldots, a_{\nu-1} \\ a_{n-1}, & a_n, & \ldots, 0, & 0, & a_0, & \ldots, a_{\nu-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-\nu+1}, & a_{n-\nu+2}, & \ldots, a_n, & 0, & 0, & \ldots, a_0 \\ \bar{a}_0, & 0, & \ldots, 0, & \bar{a}_n, & \bar{a}_{n-1}, & \ldots, \bar{a}_{n-\nu+1} \\ \bar{a}_1, & \bar{a}_0, & \ldots, 0, & 0, & \bar{a}_n, & \ldots, \bar{a}_{n-\nu+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{\nu-1}, & \bar{a}_{\nu-2}, & \ldots, \bar{a}_0, & 0, & 0, & \ldots, \bar{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ositive (von Null verschiedene) Werte haben."

---

[15]) A. a. O. Satz XVII.

Die in § 1 aufgestellte Regel gestattet es uns nicht bloß, diesen Satz auf rein algebraischem Wege zu beweisen, sondern auch den viel allgemeineren Satz auszusprechen:

II. *Besitzt* $\mathfrak{H}$ *in der Normalform* π *positive und* ν *negative Quadrate und ist*

$$\pi + \nu = n,$$

so hat das Polynom $g(x)$ π *Nullstellen im Innern und* ν *Nullstellen außerhalb des Einheitskreises.*

2. Betrachten wir zuerst Fall I unserer Regel:

$$|a_0| < |a_n|.$$

Das Polynom (17) hat dann *eine Nullstelle mehr im Einheitskreis* als das Polynom $(n-1)$-ten Grades

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{x}\left(\bar{a}_n g(x) - a_0 g^*(x)\right) \\ &= (\bar{a}_n a_1 - a_0 \bar{a}_{n-1}) + (\bar{a}_n a_2 - a_0 \bar{a}_{n-2})\, x + \ldots + (\bar{a}_n a_n - a_0 \bar{a}_0)\, x^{n-1} \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}, \end{aligned}$$

dem die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left| \bar{a}_{n-1}^{(1)} x_\lambda + \bar{a}_{n-2}^{(1)} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda^{(1)} x_{n-1} \right|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left| a_0^{(1)} x_\lambda + a_1^{(1)} x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda}^{(1)} x_{n-1} \right|^2$$

zugeordnet ist.

Wie sich mit Hilfe der Identität

$$(|a_n|^2 - |a_0|^2)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = |a_n \alpha - \bar{a}_0 \beta|^2 - |\bar{a}_n \beta - a_0 \alpha|^2,$$

(in der man

$$\alpha = \bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda x_n,$$
$$\beta = a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} x_n$$

zu setzen hat), leicht ergibt, besteht zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ die Relation[16])

$$\begin{aligned} &(a_n \bar{a}_n - a_0 \bar{a}_0)\, \mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= |a_n(\bar{a}_n x_1 + \ldots + \bar{a}_1 x_n) - \bar{a}_0 (a_0 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_n)|^2 \\ &\quad + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$\begin{aligned} (18_1) \qquad & a_{n-1}^{(1)}\, \mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= |\bar{a}_{n-1}^{(1)} x_1 + \bar{a}_{n-2}^{(1)} x_2 + \ldots + \bar{a}_0^{(1)} x_n|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

---

[16]) Vgl. Journ. f. Math. **147** (1917), S. 217, Formel (14).

ier ist

$$a_{n-1}^{(1)} = |a_n|^2 - |a_0|^2 > 0.$$

ie Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ besitzt also *ein positives Quadrat mehr* als $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Soll $g(x)$ zur Klasse K gehören, so ist dafür notwendig und hinichend, daß $|a_0| < |a_n|$ ist, und daß

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_{n-1}(x) = 0$$

enfalls K-Gleichungen sind. Dann ist also $\mathfrak{H}$ als Summe von n positiven uadraten darstellbar, d. h. positiv definit.

3. Wenden wir uns jetzt zu Fall II der Regel:

$$|a_0| > |a_n|.$$

as Polynom (17) verschwindet im Innern des Einheitskreises ebensooft wie

$$\begin{aligned} (x) &= \bar{a}_0 g(x) - a_n g^*(x) \\ &= (\bar{a}_0 a_0 - a_n \bar{a}_n) + (\bar{a}_0 a_1 - a_n \bar{a}_{n-1}) x + \ldots + (\bar{a}_0 a_{n-1} - a_n \bar{a}_1) x^{n-1} \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}. \end{aligned}$$

ußerhalb des Einheitskreises besitzt $g(x)$ *eine Nullstelle mehr* als $g_1(x)$. em Polynom $g_1(x)$ ist wieder die Hermitesche Form $\mathfrak{H}^{(1)}$ zugeordnet; bei ist aber zu beachten, daß jetzt

$$a_\nu^{(1)} = \bar{a}_0 a_\nu - a_n \bar{a}_{n-\nu}$$

esetzt worden ist.

Vermöge der Identität

$$(|a_0|^2 - |a_n|^2)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = |a_0 \alpha - \bar{a}_n \beta|^2 - |\bar{a}_0 \beta - a_n \alpha|^2$$

hält man zwischen den Hermiteschen Formen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ leicht die eziehung

$$\begin{aligned} &(a_0 \bar{a}_0 - a_n \bar{a}_n) \mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= -|\bar{a}_0 (a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n) - a_n (\bar{a}_n x_1 + \bar{a}_{n-1} x_2 + \ldots + a_1 x_n)|^2 \\ &\quad + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

ler

$$\begin{aligned} (18_{II}) \qquad & a_0^{(1)} \mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= -|a_0^{(1)} x_1 + a_1^{(1)} x_2 + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x_n|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

dieser Formel ist $a_0^{(1)} = |a_0|^2 - |a_n|^2 > 0$. $\mathfrak{H}$ besitzt also jetzt ein *gatives Quadrat mehr* als $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Indem man $\mathfrak{H}^{(1)}$ in derselben Weise auf Grund der Formeln (18_I) ler (18_{II}) darstellt usw., gelangt man zu der Darstellung der Form $\mathfrak{H}$ der Normalform

$$\mathfrak{H} = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \ldots + |y_\tau|^2 - |y_{\tau+1}|^2 - \ldots - |y_n|^2.$$

Die Anzahl π der positiven Quadrate stimmt mit der Anzahl der Nullstellen überein, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist; die Anzahl ν der negativen Quadrate in der Normalform liefert die Zahl der Wurzeln, die sich außerhalb des Einheitskreises befinden.

4. Dieses Resultat haben wir aber bisher nur unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Ungleichungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} &|a_0| \neq |a_n|, \\ &|a_0^{(\nu)}| \neq |a_{n-\nu}^{(\nu)}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

sämtlich erfüllt sind. Trifft das nicht zu (Fall III und IV der Regel), so liegt es nahe, an Stelle von $g(x)$

$$g_r(x) = a_0 + a_1 r x + \ldots + a_n r^n x^n \qquad (r < 1)$$

zu benutzen. Für hinreichend nahe an 1 gewählte Werte von r besitzt $g_r(x)$ ebenso viele Nullstellen im Innern des Einheitskreises. Die den Ungleichungen (19) entsprechenden Ungleichungen für die Koeffizienten des Polynoms $g_r(x)$ sind nur für endlich viele reelle Werte von r nicht erfüllt[17]; r kann also wirklich so gewählt werden, daß sich die zu $g_r(x)$ gehörende Hermitesche Form $\mathfrak{H}_r$ durch wiederholte Anwendung der Formeln (18_{I}) oder (18_{II}) in die Normalform überführen läßt. Die sich auf diese Weise ergebenden charakteristischen Zahlen der Form $\mathfrak{H}_r$ seien π_r, ν_r, ϱ_r.

Wir wissen, daß π_r die Anzahl der Nullstellen angibt, die das Polynom (17) innerhalb des Einheitskreises besitzt. Es fragt sich aber noch, ob π_r mit π übereinstimmt.

Die Voraussetzung $\pi + \nu = n$ $(\varrho = 0)$ besagt mit anderen Worten, daß die Form $\mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vom Range n sein, d. h. daß ihre Determinante H von Null verschieden sein soll. Infolgedessen wird für hinreichend nahe bei 1 gewählte Werte von r auch die Determinante H_r der für $r = 1$ in $\mathfrak{H}$ übergehenden Hermiteschen Form $\mathfrak{H}_r$ nicht verschwinden.

Daß unter dieser Voraussetzung tatsächlich $\pi_r = \pi$ ist, ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz I des folgenden Paragraphen.

Eine ganz ähnliche Überlegung, bei der man nur $r > 1$ zu wählen hat, lehrt, daß ν mit der Zahl der außerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen des Polynoms (17) übereinstimmt.

---

[17]) Keine der Relationen $|a_0^{(\nu)}| = |a_{n-\nu}^{(\nu)}|$ kann für alle r identisch erfüllt sein, da $g_r(x) = 0$ für große Werte von r eine K-Gleichung ist.

§ 5.

Hilfssätze über Hermitesche Formen und Determinanten.

1. Die Koeffizienten $c_{ik}(r)$ der Hermiteschen Form

$$\mathfrak{H}(r) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (c_{ki} = \bar{c}_{ik})$$

seien ganze rationale Funktionen eines reellen Parameters r:

$$c_{ik}(r) = \gamma_{ik}^{(0)} + \gamma_{ik}^{(1)} r + \ldots + \gamma_{ik}^{(m)} r^m .$$

Unter $\pi(r)$ verstehen wir die Anzahl der positiven Quadrate, die die Form $\mathfrak{H}(r)$ aufweist, wenn man sie in die Normalform

$$|y_1|^2 + |y_2|^2 + \ldots + |y_{\pi(r)}|^2 - |y_{\pi(r)+1}|^2 - \ldots - |y_{\pi(r)+\nu(r)}|^2$$

transformiert. Schließlich sei

$$H(r) = |c_{ik}(r)|$$

die Determinante der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}(r)$. Es gilt dann der folgende, einfache

Hilfssatz I. *In einem Intervall*

$$a \leqq r \leqq b ,$$

in dem die Determinante $H(r)$ der Form $\mathfrak{H}(r)$ von Null verschieden ist, hat $\pi(r)$ überall denselben Wert.

Die Zahl $\pi(r)$ können wir nämlich charakterisieren als die Anzahl der positiven Wurzeln der Säkulargleichung

$$S(u) = |C - uE| = (-1)^n (u^n + \ldots + (-1)^n H(r)) = 0 ,$$

wo $C = (c_{ik})$ die Matrix der Form $\mathfrak{H}(r)$ bedeutet. Da $S(u)$ nur reelle Wurzeln besitzt, kann sich die Anzahl der positiven Wurzeln dieser Gleichung nicht ändern, solange $H(r) \neq 0$ ist.

2. Die Zahl $\pi(r)$ wird auch durch die Anzahl der Vorzeichenfolgen dargestellt, welche die Kette der Abschnittsdeterminanten

$$H(r) = H_n(r),\ H_{n-1}(r),\ \ldots,\ H_1(r),\ 1$$

der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}(r)$ aufweist. Unser Hilfssatz besagt also, daß sich diese Anzahl nur beim Durchgange durch die Stellen r_ν ändern kann, für die $H(r_\nu) = 0$ ist. Setzen wir nun voraus, daß $H(r)$, $H_{n-1}(r)$ in dem betrachteten Intervall *nicht gleichzeitig* verschwinden, so wird beim Passieren einer Nullstelle von $H(r)$ *höchstens eine* Vorzeichenfolge gewonnen oder verloren. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur zu bedenken, daß man die Determinanten

$$H_{n-1}(r),\ H_{n-2}(r),\ \ldots,\ H_1(r),\ 1$$

als Kette der Abschnittsdeterminanten einer Hermiteschen Form mit der Determinante $H_{n-1}(r)$ ansehen kann, die — da $H_{n-1}(r)$ an der betreffenden Stelle von Null verschieden ist — nach Hilfssatz I keine Vorzeichenfolge gewinnen oder verlieren kann.

Setzen wir weiter voraus, daß die Kette für $r = a$ nur Vorzeichenwechsel, für $r = b$ nur Vorzeichenfolgen aufweist und daß $H(r)$ im Intervall $a \ldots b$ genau n-mal verschwindet, so muß offenbar beim Passieren jeder Nullstelle r_ν *genau eine* Vorzeichenfolge gewonnen werden. Wir erhalten damit den folgenden Satz, der uns in § 7 gute Dienste leisten wird:

Hilfssatz II. *Die Determinante $H(r)$ der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}(r)$ besitze im Intervall*

$$a < r < b \tag{J}$$

die n verschiedenen (einfachen) Nullstellen: $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$. Weist die Kette der Abschnittsdeterminanten

$$H(r) = H_n(r),\ H_{n-1}(r),\ \ldots,\ H_1(r),\ 1$$

für $r = a$ nur Vorzeichenwechsel, hingegen für $r = b$ nur Vorzeichenfolgen auf, und verschwinden $H(r)$, $H_{n-1}(r)$ in J nie gleichzeitig, so stimmt die Anzahl der in einem Teilintervall von J verloren gehenden Vorzeichenwechsel der Kette mit der Anzahl der reellen, in demselben Teilintervall gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$H(r) = 0$$

überein.

3. Es soll hier noch ein Satz über Determinanten bewiesen werden.

Hilfssatz III. *Sind P, Q, R, S vier Matrizen desselben Grades und ist sowohl P mit R wie auch Q mit S vertauschbar, so ist*

$$\begin{vmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P', & Q' \\ R', & S' \end{vmatrix} = |P'S' - R'Q'|. \tag{20}$$

Dabei bedeutet P', wie üblich, die zu P transponierte Matrix.

Den Beweis führe ich mit Hilfe eines auf der Relation

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, & 0 \\ C, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E, & A^{-1}B \\ 0, & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

beruhenden Satzes von Herrn I. Schur[18]):

Sind A, B, C, D vier Matrizen desselben Grades und ist A mit C vertauschbar, so ist

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

[18]) Vgl. S. 216—217 der in Fußnote [16]) zitierten Arbeit.

Aus diesem Satze ergibt sich unser Hilfssatz folgendermaßen.
Zunächst ist

$$\begin{vmatrix} P, Q \\ R, S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S, R \\ Q, P \end{vmatrix} = |SP - QR|,$$

S mit Q vertauschbar sein soll, und, da der Übergang zur trans-
ierten Matrix den Wert ihrer Determinante nicht ändert,

$$\begin{vmatrix} P, Q \\ R, S \end{vmatrix} = |P'S' - R'Q'| = \begin{vmatrix} P', Q' \\ R', S' \end{vmatrix},$$

P, R und infolgedessen auch P', R' vertauschbare Matrizen sind.

§ 6.

Die Resultante von g und g^*.

1. Dem Polynom n-ten Grades

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

hen wir die Dreiecksmatrix n-ten Grades

$$A = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1} \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_0 \end{pmatrix}$$

[19]). Ihr ν-ter Abschnitt

$$A_\nu = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{\nu-1} \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_0 \end{pmatrix}$$

n dann als die dem Polynom

$$g_\nu(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\nu x^\nu$$

eordnete Matrix aufgefaßt werden. Zu dem Polynom

$$g^*(x) = x^n \bar{g}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \ldots + \bar{a}_0 x^n$$

---

[19]) Man vgl. O. Toeplitz, „Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen unendlich vielen Veränderlichen." I. Teil. Math. Ann. 70 (1910), S. 356.

gehört die Matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_n, & \bar{a}_{n-1}, & \bar{a}_{n-2}, & \ldots, & \bar{a}_1 \\ 0, & \bar{a}_n, & \bar{a}_{n-1}, & \ldots, & \bar{a}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \bar{a}_n \end{pmatrix},$$

deren ν-ten Abschnitt $(A^*)_\nu$ wir mit A_ν^* bezeichnen wollen.

Einem anderen Polynom

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

ordnen wir die in derselben Weise definierten Matrizen B und B^* zu.

Die Matrizen A_ν, B_ν (und infolgedessen auch A'_ν, B'_ν) sind mit einander vertauschbar; denn bezeichnet man die zu dem Produkt

$$g(x)h(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \ldots + a_n b_n x^{2n}$$

gehörige Matrix $2n$-ten Grades mit C, so ist $A_\nu B_\nu$ nichts anderes al der ν-te Abschnitt dieser Matrix.

Die Resultante der Polynome $g(x)$ und $h(x)$

$$R(g,h) = \left|\begin{array}{cccc|cccc} a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_1, & a_0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_n, & \ldots, & a_2, & a_1, & a_0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & a_n, & a_{n-1}, & a_{n-2}, & \ldots, & a_0 \\ \hline b_n, & b_{n-1}, & \ldots, & b_1, & b_0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & b_n, & \ldots, & b_2, & b_1, & b_0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & b_n, & b_{n-1}, & b_{n-2}, & \ldots, & b_0 \end{array}\right|$$

können wir auffassen als die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^*, & A' \\ \bar{B}^*, & B' \end{pmatrix},$$

in der die übereinander stehenden Teilmatrizen miteinander vertauschb sind. Wir erhalten daher auf Grund des Hilfssatzes III des vorigen Par graphen (Formel (20)) die folgende Darstellung der *Resultante irgen zweier Polynome desselben Grades*:

$$(21) \qquad R(g,h) = \left|\begin{matrix} \bar{A}^{*\prime}, & A \\ \bar{B}^{*\prime}, & B \end{matrix}\right| = |\bar{A}^{*\prime} B - \bar{B}^{*\prime} A|.$$

2. Wir setzen nun speziell

$$h(x) = g^*(x),$$

n wird

$$h^*(x) = x^n \bar{h}\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \bar{g}^*\left(\frac{1}{x}\right) = g(x),$$

$B = A^*$ und $B^* = A$, und wir erhalten für die Resultante von $g(x)$ $g^*(x)$ nach (21) die Gleichung

$$R(g, g^*) = \begin{vmatrix} \bar{A}^{*\prime}, & A \\ \bar{A}', & A^* \end{vmatrix} = |\bar{A}^{*\prime} A^* - \bar{A}' A|.$$

Bekanntlich ist $\bar{A}' A$ die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Form

$$\mathfrak{A} = \sum_{\lambda=1}^{n} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} x_n|^2;$$

n kann daher die Resultante (22) auffassen als die Determinante der rm

$$\mathfrak{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{A}^* - \mathfrak{A} = \sum_{\lambda=1}^{n} |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda x_n|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} x_n|^2.$$

Das ist dieselbe Hermitesche Form, mit der wir uns schon in § 4 schäftigt haben. Die in Satz I definierten Determinanten

$$\delta_\nu = \begin{vmatrix} \bar{A}_\nu^{*\prime}, & A_\nu \\ \bar{A}_\nu', & A_\nu^* \end{vmatrix} = |\bar{A}_\nu^{*\prime} A_\nu^* - \bar{A}_\nu' A_\nu| \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ (\delta_0 = 1) \end{matrix}$$

lden eine Kette von Hauptunterdeterminanten der Form (23), und zwar speziell für $\nu = n$ wegen (22)

$$\delta_n = R(g, g^*) = H.$$

3. Besitzt das Polynom

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

ur reelle Koeffizienten, so zerfällt die Resultante $R(g, g^*)$. Hierauf t E. B. Elliott[20]) zuerst aufmerksam gemacht, die Zerlegung ist aber st von W. W. Taylor[21]) wirklich durchgeführt worden.

---

[20]) „On the Existence of a Root of a Rational Integral Equation". Proc. Lond. ath. Society 25 (1894), S. 173–184.

[21]) „Evolution of a certain Dialytic Determinant". Proc. Lond. Math. Society 27 896), S. 60–66.

Man vgl. besonders den Aufsatz: „On the Eliminant of $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$" n Thomas Muir, Proc. of Royal Society of Edinburgh 21 (1895–1897), S. 360.

Setzt man

$$\hat{A}_\nu = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_0 \\ 0, & 0, & \ldots, & a_0, & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_0, & \ldots, & a_{\nu-3}, & a_{\nu-2} \\ a_0, & a_1, & \ldots, & a_{\nu-2}, & a_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\delta_\nu = |A_\nu^* + \hat{A}_\nu| \cdot |A_\nu^* - \hat{A}_\nu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n \quad (24a)$$

und speziell für die Resultante $R(g, g^*)$

$$\delta_n = (-1)^n g(1) g(-1) |A_{n-1}^* - \hat{A}_{n-1}|^2. \quad (25a)$$

§ 7.

Sturmsche Kette für die absoluten Beträge der Wurzeln.

1. Aus der Resultanteneigenschaft der Determinante von $\mathfrak{H}$ ergib sich ein neuer Beweis des Satzes II und eine Verschärfung des Satzes I

Das Polynom

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

besitze die Nullstellen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;$$

dann verschwindet

$$g^*(x) = x^n \bar{g}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \ldots + \bar{a}_0 x^n$$

an den Stellen

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_1}, \quad \frac{1}{\bar{\alpha}_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\bar{\alpha}_n}$$

und die Resultante $\delta_n(r)$ der beiden Gleichungen

$$G(x) = g(rx) = a_0 + a_1 r x + \ldots + a_n r^n x^n = a_n r^n \prod_{\mu=1}^{n} \left(x - \frac{\alpha_\mu}{r}\right) = 0$$

und

$$G_{(x)}^* = x^n \bar{g}\left(\frac{r}{x}\right) = \bar{a}_n r^n + \bar{a}_{n-1} r^{n-1} x + \ldots + \bar{a}_0 x^n = \bar{a}_0 \prod_{\mu=1}^{n} \left(x - \frac{r}{\bar{\alpha}_\mu}\right) = 0$$

lautet, dargestellt durch die Gleichungswurzeln:

$$\delta_n(r) = (a_n r^n)^n \bar{a}_0^n \prod_{\mu,\nu} \left(\frac{\alpha_\mu}{r} - \frac{r}{\bar{\alpha}_\nu}\right) = (a_n \bar{a}_0)^n \prod_{\mu,\nu} \left(\alpha_\mu - \frac{r^2}{\bar{\alpha}_\nu}\right)$$

$$= \left(\frac{a_n \bar{a}_0}{\prod_{\nu=1}^{n} \bar{\alpha}_\nu}\right)^n \prod_{\mu,\nu} (\alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu - r^2).$$

Nun ist $\prod_{\nu=1}^{n} \bar{\alpha}_\nu = (-1)^n \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n}$, also

$$\delta_n(r) = (-1)^{n^2} (a_n \bar{a}_n)^n \prod_{\mu,\nu} (\alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu - r^2) = |a_n|^{2n} \prod_{\mu \neq \nu} (r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu) \cdot \prod_{\mu=1}^{n} (r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\mu)$$

oder schließlich

$$\delta_n(r) = |a_n|^{2n} \prod_{\mu>\nu} |r^2 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu|^2 \prod_{\mu=1}^{n} (r + |\alpha_\mu|) \prod_{\mu=1}^{n} (r - |\alpha_\mu|). \tag{26}$$

2. Die Wurzeln α_μ seien nun vorläufig so gewählt, daß

1. die n^2 Zahlen $\alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu$ sämtlich voneinander verschieden sind, und daß
2. $\delta_n(r)$, $\delta_{n-1}(r)$ für reelles, positives r nicht gleichzeitig verschwinden.

Wie man aus (26) unmittelbar ersieht, hat dann die Determinante $\delta_n(r)$ genau n reelle, positive, einfache Nullstellen: $|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots < |\alpha_n|$. Ferner ist die Hermitesche Form

$$\mathfrak{H}(r) = \sum_{\lambda=1}^{n} |\bar{a}_n r^n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} r^{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{a}_\lambda r^\lambda x_n|^2 - \sum_{\lambda=1}^{n} |a_0 x_\lambda + a_1 r x_{\lambda+1} + \ldots + a_{n-\lambda} r^{n-\lambda} x_n|^2 \tag{27}$$

für $r = 0$ negativ, für genügend groß gewählte Werte von r positiv definit, erfüllt also alle Voraussetzungen des Hilfssatzes II in § 5, 2. Wir haben damit Satz II in etwas anderer Formulierung wiedergefunden:

II'. *Die Anzahl der beim Übergang von r_1 zu r_2 verloren gehenden Vorzeichenwechsel der Kette der Abschnittsdeterminanten*

$$\begin{array}{llllllll}
a_n r^n, & 0, & \ldots, & 0, & a_0, & a_1 r, & \ldots, & a_{\nu-1} r^{\nu-1} \\
a_{n-1} r^{n-1}, & a_n r^n, & \ldots, & 0, & 0, & a_0, & \ldots, & a_{\nu-2} r^{\nu-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-\nu+1} r^{n-\nu+1}, & a_{n-\nu+2} r^{n-\nu+2}, & \ldots, & a_n r^n, & 0, & 0, & \ldots, & a_0 \\
\bar{a}_0, & 0, & \ldots, & 0, & \bar{a}_n r^n, & \bar{a}_{n-1} r^{n-1}, & \ldots, & \bar{a}_{n-\nu+1} r^{n-\nu+1} \\
\bar{a}_1 r, & \bar{a}_0, & \ldots, & 0, & 0, & \bar{a}_n r^n, & \ldots, & \bar{a}_{n-\nu+2} r^{n-\nu+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{a}_{\nu-1} r^{\nu-1}, & \bar{a}_{\nu-2} r^{\nu-2}, & \ldots, & \bar{a}_0, & 0, & 0, & \ldots, & \bar{a}_n r^n
\end{array}$$

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n;\ \delta_0 = 1)$

Der Hermiteschen Form (27) liefert, falls $\delta_n(r_1)$ und $\delta_n(r_2)$ von Null verschieden sind, die Zahl der Wurzeln der Gleichung

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

deren absolute Beträge zwischen den Grenzen $r_1 < r_2$ gelegen sind. Die Gleichung besitzt dann keine Wurzel vom absoluten Betrage r_1 oder r_2.

3. Der letzte Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus Formel (26). Wir haben den ganzen Satz aber noch für den Fall zu beweisen, daß die Wurzeln den Voraussetzungen 1. oder 2. nicht genügen.

Bedeutet d die kleinste Entfernung der Wurzelpunkte α_μ von den Peripherieen der den betrachteten Kreisring begrenzenden Kreise, so besitzt das Polynom

$$F(x) = a_n \prod_{\mu=1}^{n} (x - \alpha_\mu - u_\mu - i v_\mu) \qquad (u_\mu^2 + v_\mu^2 \leqq \varepsilon < d^2)$$

ebenso viele Nullstellen in dem Kreisring wie $g(x)$. Für genügend klein gewähltes ε sind die zu $F(x)$ gehörigen (für $\varepsilon = 0$ in $\delta_n(r_1) \neq 0$, bzw. $\delta_n(r_2) \neq 0$ übergehenden) Determinanten $\Delta_n(r_1)$ und $\Delta_n(r_2)$ von Null verschieden. Wählen wir jetzt die $2n$ Parameter u_μ, v_μ so, daß die n^2 Zahlen $(\alpha_\mu + u_\mu + i v_\mu)$ $(\bar{\alpha}_\nu + u_\nu - i v_\nu)$ sämtlich voneinander verschieden ausfallen und $\Delta_n(r)$, $\Delta_{n-1}(r)$ für $r > 0$ nicht zugleich verschwinden, so gilt unser Satz für das Polynom $F(x)$. Auf Grund des Hilfssatzes I (§ 5, 1.), den wir der Reihe nach für die Parameter $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$ anwenden dürfen, ergibt sich dann Satz II′ auch für das Polynom $g(x)$.

4. Ist $\delta_n(1) = \delta_n = |a_n|^{2n} \prod_{\mu,\nu} (1 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu) = 0$, so können nicht alle Wurzeln im Innern des Einheitskreises liegen. Satz II′ liefert daher als spezielles Resultat den Satz I. Wir sind aber jetzt in der Lage, diesen Satz noch etwas zu verschärfen.

Ia. *Besitzen die n Determinanten*

$$\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_n$$

positive Werte, so sind die Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ dem absoluten Betrage nach sogar

$$< 1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}}.$$

Es sei nämlich

$$1 > r = |\alpha_1| \geqq |\alpha_\mu| \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n).$$

Dann ist nach (26)

$$\delta_n = |a_n|^{2n} \prod_{\mu>\nu} |1 - \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu|^2 \prod_{\mu=1}^{n} (1 - |\alpha_\mu|^2) < |a_n|^{2n} 2^{n(n-1)} (1 - r^2),$$

also

$$r^2 < 1 - \frac{\delta_n}{2^{n(n-1)} |a_n|^{2n}} < \left(1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}}\right)^2, \qquad r < 1 - \frac{\delta_n}{2^{n^2-n+1} |a_n|^{2n}},$$

wie zu beweisen war.

5. Besitzt die Gleichung $g(x) = 0$ nur *reelle* Koeffizienten, so zerllen die Determinanten δ_ν. Die Ungleichungen des Satzes I lassen sich nn durch die doppelte Anzahl einfacher gebauter Ungleichungen ersetzen.

Ib. *Die Nullstellen des Polynoms mit reellen Koeffizienten*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_n > 0)$$

egen dann und nur dann sämtlich im Innern des Einheitskreises, wenn lgende $2n$ Ungleichungen erfüllt sind:

$$g(1) > 0, \qquad (-1)^n g(-1) > 0,$$

$$d_\nu = \begin{vmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-\nu+2}, & a_{n-\nu+1} + a_0 \\ 0, & a_n, & \ldots, & a_{n-\nu+3} + a_0, & a_{n-\nu+2} + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & a_0, & \ldots, & a_n + a_{\nu-3}, & a_{n-1} + a_{\nu-2} \\ a_0, & a_1, & \ldots, & a_{\nu-2}, & a_n + a_{\nu-1} \end{vmatrix} > 0,$$

$$d'_\nu = \begin{vmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-\nu+2}, & a_{n-\nu+1} - a_0 \\ 0, & a_n, & \ldots, & a_{n-\nu+3} - a_0, & a_{n-\nu+2} - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & -a_0, & \ldots, & a_n - a_{\nu-3}, & a_{n-1} - a_{\nu-2} \\ -a_0, & -a_1, & \ldots, & -a_{\nu-2}, & a_n - a_{\nu-1} \end{vmatrix} > 0$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Die absoluten Beträge der Wurzeln sind dann sogar sämtlich

$$< 1 - \frac{g(1)\,|g(-1)|\,d'^2_{n-1}}{2^{n^2-n+1}\,a_n^{2n}}.$$

Auf Grund der Relation (24a) ist nämlich

$$\delta_\nu = d_\nu d'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

d nach (25a)

$$\delta_n = (-1)^n g(1) g(-1) d'^2_{n-1}.$$

nd also die $2n$ Ungleichungen des Satzes erfüllt, so erweist sich $g(x)$ ch Satz I sofort als ein Polynom der Klasse K.

Es bleibt noch zu zeigen, daß umgekehrt die Ungleichungen sämtlich erfüllt sein müssen, wenn $g(x) = 0$ eine K-Gleichung ist. Aus dem tz I folgt, daß dann für $r \geqq 1$ die Determinanten $\delta_\nu(r)$ positive, von ll verschiedene Werte haben. Setzt man entsprechend Formel (24a)

$$\delta_\nu(r) = d_\nu(r)\, d'_\nu(r),$$

können daher die Determinanten $d_\nu(r)$, $d'_\nu(r)$ für $r \geqq 1$ nicht verhwinden. Ihr Anblick lehrt aber sofort, daß sie (infolge der Annahme > 0) für großes r positive Werte haben. In derselben Weise kann man

schließen, daß die für $r \geqq 1$ von Null verschiedenen, für große Werte von r offenbar positiven Polynome

$$g(r) = a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n,$$
$$(-1)^n g(-r) = (-1)^n a_0 + (-1)^{n-1} a_1 r + \ldots + a_n r^n$$

auch für $r = 1$ positive Werte besitzen müssen.

§ 8.

Eine Anwendung des Satzes I.

1. R. Jentzsch[22]) hat folgenden Satz aufgestellt:

Die Gesamtheit der Werte w, für welche die Wurzeln der Gleichung

$$g(x) - w = 0$$

sämtlich in einem konvexen Bereiche $\mathfrak{B}_1$ liegen, bildet ebenfalls einen konvexen Bereich $\mathfrak{B}_2$.

Man kann das auch so ausdrücken:

Ein Polynom nimmt außerhalb eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}_1$ jeden Wert an, höchstens mit Ausnahme der Punkte eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}_2$.

Für rationale Funktionen kann dieser Satz nicht mehr ohne Einschränkungen gelten, wie schon die durch $\frac{1}{x}$ vermittelte Abbildung zeigt[23]). Es gilt aber folgender, den Satz von Jentzsch als speziellen Fall enthaltender Satz:

III. *Eine rationale Funktion*

$$R(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

nimmt außerhalb irgendeines Kreises, in dem (und auf dessen Rande) sie keinen Pol besitzt, jeden Wert an, höchstens mit Ausnahme der Punkte eines konvexen Bereiches.

Es genügt offenbar, diesen Satz für den Einheitskreis zu beweisen. Die beiden Polynome

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k, \tag{28}$$
$$h(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_l x^l$$

mögen teilerfremd sein; dann verschwindet $h(x)$ nur außerhalb des Einheitskreises. Es kommt also nur darauf an, folgendes zu zeigen:

[22]) Archiv d. Math., 3. Reihe, 25 (1917), S. 196, Aufg. Nr. 526.

[23]) Z. B. geht der Dreiecksbereich $\mathfrak{B}_1$ durch Spiegelung am EK. in den *nicht konvexen* Kreisbogenbereich $\mathfrak{B}_2$ über (s. nebenstehende Figur)

III'. *Sind*

$$F(w_1|x) = g(x) - w_1 h(x) = 0$$

und

$$F(w_2|x) = g(x) - w_2 h(x) = 0$$

Gleichungen der Klasse K und ist $h(x)$ für $|x| \leqq 1$ von Null verschieden, so liegen die Wurzeln der Gleichung

29) $$F\left(\frac{w_1+w_2}{2}\middle| x\right) = g(x) - \frac{w_1+w_2}{2} h(x) = 0$$

nicht außerhalb des Einheitskreises.

2. Wir wollen zunächst annehmen, daß $g(x)$ und $h(x)$ Polynome desselben Grades n sind. Bedeuten A, A^* bzw. B, B^* die ihnen zugeordneten Matrizen, so gehören zu $F(w|x)$ die Matrizen

$$A - wB \quad \text{und} \quad A^* - \bar{w} B^*.$$

Es ist also zugeordnet dem Polynom

$$g(x)$$

die Hermitesche Form mit der Koeffizientenmatrix

$$\bar{A}^{*\prime} A^* - \bar{A}^{\prime} A,$$

ferner

$$h(x)$$

die Form

$$\mathfrak{R} = \bar{B}^{*\prime} B^* - \bar{B}^{\prime} B,$$

schließlich gehört zu

$$F(w|x) = g(x) - w h(x)$$

die Hermitesche Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(w) &= (\bar{A}^{*\prime} - w\bar{B}^{*\prime})(A^* - \bar{w} B^*) - (\bar{A}^{\prime} - \bar{w}\bar{B}^{\prime})(A - wB) \\ &= \bar{A}^{*\prime} A^* - \bar{A}^{\prime} A + |w|^2 (\bar{B}^{*\prime} B^* - \bar{B}^{\prime} B) \\ &\quad - w(\bar{B}^{*\prime} A^* + \bar{A}^{\prime} B) - \bar{w}(\bar{A}^{*\prime} B^* + \bar{B}^{\prime} A).\end{aligned}$$

Man erhält nun

29a) $$\begin{aligned}2\mathfrak{H}\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) &= \mathfrak{H}(w_1) + \mathfrak{H}(w_2) + \left\{2\left|\frac{w_1+w_2}{2}\right|^2 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)\right\}\mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{H}(w_1) + \mathfrak{H}(w_2) - \frac{1}{2}|w_1 - w_2|^2 \mathfrak{R}.\end{aligned}$$

Hier sind die Hermiteschen Formen $\mathfrak{H}(w_1)$ und $\mathfrak{H}(w_2)$ nach Satz I positiv definit, hingegen ist $\mathfrak{R}$ als die dem nur für $|x| > 1$ verschwindenden Polynom $h(x)$ zugeordnete Hermitesche Form negativ definit. Daher ist $\mathfrak{H}\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$ positiv definit, d. h. die Wurzeln der Gleichung (29) liegen sämtlich im Innern des Einheitskreises.

3. Der Fall, daß die Polynome (28) nicht denselben Grad besitzen, läßt sich leicht auf den eben behandelten zurückführen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g(x) + \varepsilon x^n, \\ h_1(x) &= h(x) + \varepsilon x^n, \end{aligned} \qquad \left(|\varepsilon| < \operatorname*{Min}_{|x|=1}\left(|h(x)|\right)\right), \qquad (n = k + l + 1)$$

so liegen auch die Nullstellen des Polynoms $h_1(x)$ sämtlich außerhalb des Einheitskreises[24]), und es ist infolgedessen

$$g_1(x) - \frac{w_1 + w_2}{2} h_1(x) = g(x) - \frac{w_1 + w_2}{2} h(x) + \varepsilon \left(1 - \frac{w_1 + w_2}{2}\right) x^n = 0$$

eine K-Gleichung. Durch den Grenzübergang $|\varepsilon| \to 0$ überzeugt man sich nun sofort davon, daß die Wurzeln der Gleichung (29) nicht außerhalb des Einheitskreises liegen können.

4. Satz III gilt auch noch, wenn $h(x)$ nur in Punkten verschwindet, die zu dem Kreise spiegelbildlich liegen und wenn der Grad von $g(x)$ den Grad des Polynoms $h(x)$ nicht übersteigt.

Eine lineare Transformation des gegebenen Kreises in den Einheitskreis führt spiegelbildliche Punkte in ebensolche über, wir dürfen uns daher wieder auf den Einheitskreis beschränken. Es soll dann also

$$h^*(x) = x^l \bar{h}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon h(x) \qquad (|\varepsilon| = 1)$$

sein. In diesem Falle ist aber

$$B^* = \varepsilon B, \qquad \bar{B}^{*\prime} B^* - \bar{B}' B = 0,$$

d. h. die Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ verschwindet identisch. Wir können daher wieder aus Formel (29a) schließen, daß

$$F\left(\frac{w_1 + w_2}{2} \middle| x\right) = 0$$

eine Gleichung der Klasse K ist.

Besitzt z. B. $h(x)$ nur reelle Koeffizienten, so liegen die Nullstellen dieses Polynoms zur reellen Achse spiegelbildlich; daher bildet

$$R(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

die Halbebene $J(x) > 0$ auf die ganze Ebene oder das Äußere eines konvexen Bereiches ab.

---

[24]) Vgl. § 2, 1.

III. Kapitel.

Kompositionssätze.

§ 9.

Satz von Grace.

1. Als *$\bar{K}$-Gleichung* soll im folgenden jede Gleichung bezeichnet werden, deren Wurzeln sämtlich im Einheitskreise *mit Einschluß seiner Peripherie* liegen [25]).

Der Gracesche Kompositionssatz, für den hier ein neuer Beweis gegeben werden soll, läßt sich dann folgendermaßen aussprechen:

IV. *Ist*

$$A(x) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \ldots + \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine K-Gleichung und

$$B(x) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \ldots + \binom{n}{\nu} b_\nu x^\nu + \ldots + b_n x^n = 0$$

eine $\bar{K}$-Gleichung, so ist

$$C(x) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \ldots + \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

eine K-Gleichung.

Dieser Satz ist völlig äquivalent mit der Behauptung:

Für irgend zwei den Voraussetzungen des Satzes IV genügende Gleichungen ist

$$C(1) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu \neq 0.$$

Denn ist

$$C(\gamma) = 0 \qquad (|\gamma| \geqq 1)$$

und setzt man $x = \sqrt{\gamma}\, z$, so ist

$$\tilde{A}(z) = A(\sqrt{\gamma}\, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu \sqrt{\gamma^\nu}\, z^\nu = 0$$

wieder eine K-Gleichung und

$$\tilde{B}(z) = B(\sqrt{\gamma}\, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu \sqrt{\gamma^\nu}\, z^\nu = 0$$

wieder eine $\bar{K}$-Gleichung, und für diese beiden Gleichungen wird

$$\tilde{C}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu \gamma^\nu z^\nu = C(\gamma z),$$

---

[25]) Jede Gleichung der Klasse K ist also eine K-Gleichung.

also $\tilde{C}(1) = C(\gamma) = 0$. Ist andererseits $C(x) = 0$ eine Gleichung der Klasse K, so ist natürlich $C(1) \neq 0$.

2. Ich führe den Beweis durch Induktion. Für lineare Gleichungen ist der Satz trivial; er sei bereits für Gleichungen $(n-1)$-ten Grades vollständig bewiesen.

Sei zunächst

$$a_0 = 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{x} A(x) = \binom{n}{1} a_1 + \ldots + \binom{n}{\nu+1} a_{\nu+1} x^\nu + \ldots + a_n x^{n-1} = 0.$$

$$\frac{1}{n} B'(x) = \quad b_1 + \ldots + \binom{n-1}{\nu} b_{\nu+1} x^\nu + \ldots + b_n x^{n-1} = 0$$

ist als derivierte Gleichung einer $\bar{K}$-Gleichung ebenfalls eine $\bar{K}$-Gleichung. Wenden wir auf diese beiden Gleichungen $(n-1)$-ten Grades unseren Kompositionssatz an, so ergibt sich

$$\frac{1}{x} C(x) = \binom{n}{1} a_1 b_1 + \ldots + \binom{n}{\nu+1} a_{\nu+1} b_{\nu+1} x^\nu + \ldots + a_n b_n x^{n-1} = 0.$$

Damit ist dieser Fall erledigt.

3. Sei jetzt

$$a_0 \neq 0.$$

Setzt man

$$B_1(x) = x^n B\left(-\frac{1}{x}\right) = b_n - \binom{n}{1} b_{n-1} x + \binom{n}{2} b_{n-2} x^2 - \ldots + (-1)^n b_0 x^n,$$

so kann

$$C(1) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 + \binom{n}{2} a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = (A, B_1)^n$$

als bilineare *Invariante* der beiden Polynome $A(x)$ und $B_1(x)$ aufgefaßt werden.

Ist nun α irgendeine Wurzel der Gleichung $A(x) = 0$, so führt die lineare Transformation des Einheitskreises in sich

$$x = \frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha} z}$$

mit der Determinante $\Delta = 1 - \bar{\alpha}\alpha > 0$ den Punkt α der x-Ebene in den Nullpunkt der z-Ebene über und es wird

$$A(x) = A\left(\frac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right) = \frac{1}{(1+\bar{\alpha}z)^n} \tilde{A}(z) = 0,$$

$$B(x) = B\left(\frac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right) = \frac{1}{(1+\bar{\alpha}z)^n} \tilde{B}(z) = 0,$$

bei

$$\tilde{A}(z) = \binom{n}{1}\tilde{a}_1 z + \binom{n}{2}\tilde{a}_2 z^2 + \ldots + \tilde{a}_n z^n = 0$$

ne K-Gleichung,

$$\tilde{B}(z) = b_0 + \binom{n}{1}\tilde{b}_1 z + \binom{n}{2}\tilde{b}_2 z^2 + \ldots + \tilde{b}_n z^n = 0$$

ne $\bar{K}$-Gleichung ist.

Da $\tilde{a}_0 = 0$ ist, so wissen wir schon, daß das durch Komposition der iden letzten Gleichungen entstehende Polynom

$$\tilde{C}(z) = \binom{n}{1}\tilde{a}_1\tilde{b}_1 z + \binom{n}{2}\tilde{a}_2\tilde{b}_2 z^2 + \ldots + \tilde{a}_n\tilde{b}_n z^n$$

r Klasse K gehört. Daher ist

$$\tilde{C}(1) \neq 0.$$

Setzen wir wieder

$$\tilde{B}_1(z) = z^n \tilde{B}\left(-\frac{1}{z}\right),$$

wird

$$C(1) = (A, B_1)^n = \Delta^{-n}(\tilde{A}, \tilde{B}_1)^n = \Delta^{-n}\tilde{C}(1) \neq 0,$$

d damit ist Satz IV vollständig bewiesen.

4. Genügen die reellen Zahlen

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

n Ungleichungen

0) $$0 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_n,$$

ist nach dem Satz von Kakeya[26])

$$\frac{\alpha_0}{n!} + \frac{\alpha_1}{(n-1)!}x + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{(n-\nu)!}x^\nu + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

ne Gleichung der Klasse K. Indem wir sie mit der $\bar{K}$-Gleichung

1) $$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ch Satz IV komponieren, entsteht die K-Gleichung

$$h(x) = \alpha_0 a_0 + 1!\,\alpha_1 a_1 x + 2!\,\alpha_2 a_2 x^2 + \ldots + n!\,\alpha_n a_n x^n = 0.$$

e absoluten Beträge der Wurzeln dieser Gleichung sind daher, wenn e Ungleichungen (30) erfüllt sind, sämtlich kleiner als der Betrag der solut größten Wurzel der Gleichung (31).

5. *Bedeutet G die einzige positive Wurzel der Gleichung*

2) $$\varphi(x) = |a_0| + |a_1|x + \ldots + |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_n|x^n = 0,$$

[26]) Vgl. § 8, 1.

so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung (31) *im Kreisring*

$$(\sqrt[n]{2}-1)\,G \leqq |x| \leqq G$$

und keine Wurzel außerhalb des Kreises

$$|x| \leqq G.$$

Der zweite Teil dieses Satzes ist trivial. Bedeutet R den Betrag der absolut größten Wurzel(n) der Gleichung (31), so ist zu zeigen, daß

$$R \geqq (\sqrt[n]{2}-1)\,G$$

ist.

Die Gleichung (32) entsteht durch Komposition von $g(x)=0$ mit

$$\frac{\bar{a}_0}{|a_0|}+\binom{n}{1}\frac{\bar{a}_1}{|a_1|}x+\ldots+\binom{n}{1}\frac{\bar{a}_{n-1}}{|a_{n-1}|}x^{n-1}-\frac{\bar{a}_n}{|a_n|}x^n=0,$$

wo für $a_\nu=0$ $\frac{\bar{a}_\nu}{|a_\nu|}$ durch Null zu ersetzen ist. Die absoluten Beträge der Wurzeln dieser Gleichung sind nicht größer als die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{1}x^{n-1}-x^n=(1+x)^n-2x^n=0,$$

d. h. nicht größer als $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$. Infolgedessen muß

$$G \leqq \frac{R}{\sqrt[n]{2}-1},$$

also

$$R \geqq (\sqrt[n]{2}-1)\,G$$

sein.

Daß hier das Gleichheitszeichen wirklich auftreten kann, lehrt das Beispiel $g(x)=(1+x)^n$, $R=1$, $G=\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

§ 10.

Satz von Egerváry.

1. Bei dem Beweise des Graceschen Kompositionssatzes hatte sich folgendes ergeben:

Liegen die Wurzeln der Gleichung

$$A(x)=a_0+\binom{n}{1}a_1x+\binom{n}{2}a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

sämtlich im Innern, hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$B_1(x)=x^nB\left(-\frac{1}{x}\right)=b_n-\binom{n}{1}b_{n-1}x+\ldots+(-1)^nb_0x^n=0$$

mtlich außerhalb oder auf dem Rande des Einheitskreises, so ist die lineare Invariante

3) $$(A, B_1)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu$$

n Null verschieden.

Führt man durch eine lineare Substitution den Kreis $|x| < 1$ in die lbebene $J(x) > 0$ über, so erhält man wegen der Invarianteneigenschaft s Ausdrucks (33) das Resultat:

Liegen die Nullstellen des Polynoms $A(x)$ sämtlich in der Halbebene $x) > 0$ und die des Polynoms $B(x)$ sämtlich in der Halbebene $J(x) \geqq 0$, ist

$$a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 + \binom{n}{2} a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \neq 0.$$

Sei nun γ eine Zahl mit negativem imaginären Bestandteil. Besitzt Gleichung

$$\tilde{A}(x) = \tilde{a}_0 + \binom{n}{1} \tilde{a}_1 x + \binom{n}{2} \tilde{a}_2 x^2 + \ldots + \tilde{a}_n x^n$$

ıter reelle, negative Wurzeln, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$A(x) = \tilde{A}(\gamma x) = a_0 + \binom{n}{1} \tilde{a}_1 \gamma x + \binom{n}{2} \tilde{a}_2 \gamma^2 x^2 + \ldots + \tilde{a}_n \gamma^n x^n = 0$$

ntlich in der Halbebene $J(x) > 0$; infolgedessen ist

$$\tilde{a}_0 b_0 + \binom{n}{1} \tilde{a}_1 b_1 \gamma + \binom{n}{2} \tilde{a}_2 b_2 \gamma^2 + \ldots + \tilde{a}_n b_n \gamma^n \neq 0.$$

Wir haben damit folgenden Satz gefunden:

V. *Besitzt die Gleichung*

4) $$A(x) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

r reelle, negative[27]) *Wurzeln und liegen die Wurzeln der Gleichung*

5) $$B(x) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

ntlich in der Halbebene

$$J(x) \geqq 0,$$

befinden sich auch alle Wurzeln der Gleichung

6) $$C(x) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

derselben Halbebene.

[27]) Allgemeiner: *nichtpositive.*

2. Sind die Wurzeln der Gleichung $B(x) = 0$ sämtlich reell, so kann das Polynom $C(x)$ offenbar keine imaginäre Nullstelle haben. Indem wir dieses Ergebnis mit Satz IV kombinieren, erhalten wir einen Satz des Herrn Egerváry:

V'. *Sind die Wurzeln der Gleichung* (34) *sämtlich reell, nichtnegativ und kleiner als* 1, *die der Gleichung* (35) *sämtlich reell und im Intervall*

$$-a < x < +a$$

gelegen, so sind alle Wurzeln der Gleichung (36) *ebenfalls reell und liegen in demselben Intervall.*

3. Sei

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$$

ein Polynom mit lauter reellen, nichtpositiven Nullstellen;

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_l x^l$$

ein Polynom, dessen Nullstellen sämtlich in der Halbebene $J(x) \geqq 0$ liegen. Komponiert man dann die Gleichungen n-ten Grades

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = a_k x^{n-k} + a_{k-1} x^{n-k+1} + \ldots + a_0 x^n = 0,$$

$$x^n \bar{h}\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{b}_l x^{n-l} + \bar{b}_{l-1} x^{n-l+1} + \ldots + \bar{b}_0 x^n = 0$$

und ersetzt man x durch $\frac{x}{n}$, so entsteht, wenn m die kleinere der beiden Zahlen k, l bedeutet,

$$n^n \varphi_n(x) = a_0 \bar{b}_0 x^n + 1!\, a_1 \bar{b}_1 x^{n-1} + \frac{n}{n-1} 2!\, a_2 \bar{b}_2 x^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{n}{n-1}\frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{n-m+1} m!\, a_m \bar{b}_m x^{n-m},$$

und die Nullstellen dieses Polynoms liegen in der Halbebene $J(x) \geqq 0$.

Dieselbe Eigenschaft besitzen daher auch die Wurzeln der Gleichung

$$\psi_n(x) = a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + \frac{n}{n-1} 2!\, a_2 b_2 x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n}{n-1}\frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{n-m+1} m!\, a_m b_m x^m = 0.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert uns so den Satz[38])

---

[38]) Vgl. I. Schur, „Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln", Journ. f. Math. **144**, S. 75–88.

VI. *Besitzt die Gleichung mit lauter reellen Wurzeln*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k = 0$$

eine negativen Koeffizienten und liegen die Wurzeln der Gleichung

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_l x^l = 0$$

mtlich in der Halbebene

$$J(x) \geqq 0,$$

liegen, wenn m die kleinere der beiden Zahlen k, l ist, auch die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \ldots + m!\, a_m b_m x^m = 0$$

mtlich in dieser Halbebene.

4. Komponiert man auf diese Weise

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \ldots + a_0 x^n$$

it

$$(1+x)^n,$$

wird

$$\varphi_1(x) = a_n + 1!\binom{n}{1} a_{n-1} x + 2!\binom{n}{2} a_{n-2} x^2 + \ldots + n!\, a_0 x^n$$

n Polynom mit lauter reellen, nichtpositiven Nullstellen. Komponieren ir zweitens

$$(1+x)^n$$

it

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

ist

$$\varphi_2(x) = b_0 + 1!\binom{n}{1} b_1 x + 2!\binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + n!\, b_n x^n$$

n für $J(x) < 0$ nicht verschwindendes Polynom. Durch Komposition on $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2(x)$ auf Grund des Satzes V finden wir

$$\begin{aligned}\psi(x) = n!\, a_0 b_0 &+ (n-1)!\, 1!\binom{n}{1} a_1 b_1 x + \ldots \\ &+ (n-\nu)!\, \nu!\binom{n}{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu + \ldots + n!\, a_n b_n x^n \\ &= n!\{a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_n b_n x^n\}\end{aligned}$$

nd damit eine Erweiterung eines von Herrn E. Malo[29]) herrührenden tzes:

[29]) „Note sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles", Journ. Math. spéc. (4) 4 (1895), S. 7.

VII. *Sind die Wurzeln der Gleichung*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

sämtlich reell und nicht positiv und liegen die Wurzeln der Gleichung

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

sämtlich in der Halbebene

$$J(x) \geqq 0,$$

so liegen auch die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

sämtlich in dieser Halbebene.

Anmerkung bei der Korrektur (29. III. 1921).

Mein Satz V findet sich auch in einer inzwischen (Nov. 1921) veröffentlichten Note des Herrn T. Takagi[30]).

[30]) „Note on the algebraic equations", Proc. of the Phys. — Math. Society of Japan (3) **3** (1921), S. 175–179.

(Eingegangen am 15. August 1921).

Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen.

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit ist aus den Anfängen der einzelnen Paragraphen ersichtlich.

Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe mit $\lambda_n \geqq 0$, α ihre einfache, β ihre absolute, γ ihre gleichmäßige Konvergenzabzisse, also

$$-\infty \leqq \alpha \leqq \gamma \leqq \beta \leqq \infty.$$

Außerdem wird mehrfach Gebrauch gemacht von der

Bedingung ($\mathfrak{B}$). *Es sei $\alpha < \infty$ und die für $\sigma > \alpha$ als Summe von (1) erklärte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \eta'$ regulär und beschränkt.*

§ 1.

Zum gleichmäßigen Konvergenzproblem.

Herr Bohr[1]) hat bewiesen: *Wenn bei der Dirichletschen Reihe (1) die Bedingung ($\mathfrak{B}$) erfüllt ist und ein $k > 0$ existiert der Art, daß*

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{k\lambda_n}),$$

hat man $\gamma \leqq \eta'$.

Herr Landau[2]) hat kürzlich gezeigt, *daß hierbei die den Exponenten auferlegte Einschränkung durch die merklich schwächere*

[1]) Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen [Journ. f. d. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 203–211], vgl. S. 205, Hilfssatz 2.

[2]) Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen [Math. Zeischr. **11** (1921), S. 317, 318].

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = O(e^{\varepsilon\lambda_n}) \quad \text{bei jedem } \varepsilon > 0$$

ersetzt werden darf.

Es ist daher die Frage naheliegend, ob die den Exponenten auferlegte Einschränkung noch weiter abgeschwächt werden kann, indem man nur verlangt, daß

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = O(e^{\varkappa\lambda_n}) \quad \text{für ein festes } \varkappa > 0. \tag{2}$$

Wir werden hier zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es vielmehr zu jedem $\varkappa > 0$ eine Dirichletsche Reihe (1) gibt, für welche Bedingung (B) mit $\eta' = 0$, sowie Beziehung (2) gilt, aber $\alpha \geqq \varkappa$ und daher

$$\gamma \geqq \alpha \geqq \varkappa = \eta' + \varkappa > \eta'$$

ist[3]).

Zur Konstruktion des angekündigten Beispiels verwenden wir die bekannten Fejér-Polynome in der Gestalt[4])

$$F_m(z) = \frac{1}{m-1}z + \ldots + \frac{1}{1}z^{m-1} - \frac{1}{1}z^{m+1} - \ldots - \frac{1}{m-1}z^{2m-1}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{2m-1} \frac{1}{m-\mu}\, z^{\mu} \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ \tfrac{1}{0} \text{ bedeute } 0)$$

und benutzen, daß zu ihnen eine absolute Konstante Γ existiert[4]) der Art, daß

$$|F_m(z)| \leqq \Gamma \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Dann lautet, wenn zur Abkürzung

$$m_\nu = [e^{\varkappa\nu}] \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots$$

gesetzt wird, unser Beispiel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} e^{-\nu s} \sum_{\mu=1}^{2m_\nu-1} \frac{1}{m_\nu - \mu} \left(e^{-s/(2m_\nu)}\right)^{\mu}.$$

Dies ist formal eine Dirichletsche Reihe (1), bei der für $\nu = 1, 2, \ldots$ die Glieder mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ zusammengefaßt sind zu einer Gruppe, die bis auf den Faktor $\nu^{-2} e^{-\nu s}$ ein Fejér-Polynom vorstellt mit $m = m_\nu$ und dem Argumente

$$z = e^{-s/(2m_\nu)}.$$

---

[3]) Schlimmeres kann man von dem Beispiel nicht verlangen. Denn der Landausche Beweis gibt unter der Voraussetzung (2) unmittelbar $\gamma \leqq \eta' + \varkappa$.

[4]) Vgl. § 4 in des Verf. Arbeit Über die Lage der Konvergenzabszissen einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabzisse ihrer Summe [Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 16 (1922), Nr. 20].

Unser Beispiel hat alle behaupteten Eigenschaften:

Zunächst ist für $\sigma > 0$ offenbar $|z| < 1$, also nach (3) jedes Glied n $\sum_{\nu}$ absolut genommen $\leqq \Gamma/\nu^2$. Diese Reihe konvergiert daher eichmäßig für $\sigma > 0$ und definiert eine dort reguläre und beschränkte nktion $f(s)$. Andererseits konvergiert unsere Dirichletsche Reihe, gar absolut, für $\sigma > \varkappa$, weil dann

$$\sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} |a_n e^{-\lambda_n s}| \leqq \nu^{-2} e^{-\nu\sigma} \cdot 2(1 + \log m_\nu) \leqq \nu^{-2} e^{-\nu\varkappa} \cdot 2(1 + e^{\varkappa\nu}) \leqq 4/\nu^2.$$

ist also bei unserer Dirichletschen Reihe $\alpha < \infty$, $f(s)$ ihre Summe, d $f(s)$ für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt.

Ferner ist (2) erfüllt. Denn für $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leqq 2 m_\nu \leqq 2 e^{e^{\varkappa\nu}} \leqq 2 e^{e^{\varkappa\lambda_n}}.$$

Dagegen ist unsere Dirichletsche Reihe divergent für $\sigma < \varkappa$. Denn ist für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$m_\nu \geqq \frac{1}{2} e^{e^{\varkappa\nu}}, \qquad \log m_\nu \geqq e^{\varkappa\nu} - \frac{3}{4} \geqq \frac{1}{4} e^{\varkappa\nu},$$

d daher auf der Strecke $0 < s < \varkappa$

$$\sum_{\nu < \lambda_n < \nu + \frac{1}{2}} a_n e^{-\lambda_n s} \geqq \nu^{-2} e^{-\nu s} \cdot e^{-\varkappa} \log m_\nu \geqq \text{konst.}\ e^{\nu(\varkappa - s) - 2\log\nu} \longrightarrow \infty.$$

s ist also $\alpha \geqq \varkappa$, was allein noch zu zeigen war.

§ 2.

Ein neuer Typ singulärer Polynome.

Im folgenden brauchen wir für eine Folge natürlicher Zahlen n solche – hier *singuläre* genannte – Polynome

$$G_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{n\nu} z^\nu,$$

ei welchen einerseits

4) $$|G_n(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1,$$

ndererseits ein $\Lambda > 0$ existiert, so daß

5) $$\sum_{\nu=0}^{n-1} |c_{n\nu}| \geqq \Lambda \sqrt{n}.$$

Das erste Beispiel einer Serie singulärer Polynome rührt von den

Herren Hardy und Littlewood[5]) her. Das zweite hat Herr Szász[6]) angegeben.

Die Diskussion dieser beiden Beispiele erfordert einen erheblichen zahlentheoretischen Apparat, so daß es am Platze ist, wenn wir hier ein drittes Beispiel angeben, dessen Diskussion mit den denkbar einfachsten Hilfsmitteln gelingt.

Dasselbe lautet für $n = m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$

$$(6) \qquad G_{m^2}(z) = \frac{1}{4m} \sum_{\omega=0}^{m-1} z^{m\omega} \sum_{\varrho=0}^{m-1} (z\, e^{-2\pi i \omega/m})^{\varrho} = \sum_{\mu=0}^{m^2-1} d_{m\mu}\, z^{\mu}.$$

Da hier (5) trivial ist, weil

$$(7) \qquad |d_{m\mu}| = \frac{1}{4m} \quad \text{für} \quad \mu = 0, 1, \ldots, m^2 - 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

so haben wir nur (4), nämlich

$$(8) \qquad |G_{m^2}(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

zu beweisen.

Dabei genügt es, $m \geqq 5$ anzunehmen (wegen (7)) und sich auf $|z| = 1$ zu beschränken, wobei noch von allen m-ten Einheitswurzeln abgesehen werden darf. Es sei also

$$(9) \qquad z = e^{2\pi i(\lambda+\vartheta)/m}, \quad \text{wo} \quad \lambda = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{und} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Dann ist

$$|4m\, G_{m^2}(z)| = \left| \sum_{\omega=0}^{m-1} z^{m\omega} \frac{1 - z^m}{1 - z e^{-2\pi i \omega/m}} \right|.$$

Dies ist, wenn die Glieder mit $\omega = \lambda$ und $\omega \equiv \lambda + 1 \pmod m$ herausgezogen werden (angedeutet durch Σ'),

$$\leqq 2m + \left| \sum_{\omega=0}^{m-1}{}' \frac{z^{m\omega}}{1 - z e^{-2\pi i \omega/m}} \sum_{\omega=0}^{m-1}{}' \frac{z^{m(\omega+1)}}{1 - z e^{-2\pi i \omega/m}} \right|,$$

und dies, wenn in der zweiten Σ' der Index ω durch $\omega - 1$ ersetzt, und dann von beiden Summationsgebieten nur der Durchschnitt beibehalten wird (angedeutet durch Σ''), nach Vereinigung der beiden Σ''

---

[5]) Some problems of Diophantine approximation [Acta math. 37 (1914), S. 155 bis 239], vgl. S. 220.

[6]) Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen [Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 222–236], vgl. § 1 und den Zusatz S. 236. Eine Abart vgl. S. 225, Fußnote [4]).

$$\leqq 3m + \left| \sum_{\omega=0}^{m-1}{}'' z^{m\omega} \frac{ze^{-2\pi i\omega/m}(1-e^{2\pi i/m})}{(1-ze^{-2\pi i\omega/m})(1-ze^{-2\pi i(\omega-1)/m})} \right|$$

$$\leqq 3m + \frac{2\pi}{m} \sum_{\omega=0}^{m-1}{}'' \frac{1}{|1-ze^{-2\pi i\omega/m}| \cdot |1-ze^{-2\pi i(\omega-1)/m}|}.$$

ierin ist

$$1 < |\lambda + \vartheta - \omega| < m-1, \quad 1 < |\lambda + \vartheta - (\omega-1)| < m-1,$$

daß schließlich

$$|4m\, G_{m^2}(z)| \leqq 3m + \frac{\pi}{m} \sum_{\varkappa=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{m}\varkappa \cdot \sin\frac{\pi}{m}(\varkappa-1)} \leqq 4m,$$

omit (8) bewiesen ist.

§ 3.

Zu einem Satze des Herrn Carlson.

Herr Carlson[7]) hat kürzlich den durch seine Allgemeinheit überschenden Satz gefunden:

Bei der Dirichletschen Reihe (1) *ist unter der Bedingung* (𝔅) *stets*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n \eta'}|^2 \text{ konvergent,}$$

nd daher auch

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n \sigma}|^2 \text{ konvergent für } \sigma \geqq \eta'.$$

Es erhebt sich die Frage, ob in (10) der Exponent 2 erniedrigt erden kann, wenigstens für einen einzigen Wert von σ.

Wir werden hier zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es vielmehr ne Dirichletsche Reihe (1) gibt, für welche nicht nur die Bedingung (𝔅) füllt, sondern sogar

$$\gamma = -\infty$$

t, während bei jedem positiven $\varkappa < 2$

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n \sigma}|^{\varkappa} \text{ divergiert für jedes } \sigma.$$

---

[7]) Sur les séries de Dirichlet [Comptes Rendus 172 (1921), 4. April]. Herr arlson setzt übrigens weniger voraus, indem er statt $\alpha < \infty$ nur eine Voraussetzung ber Summierbarkeit der Reihe (1) hat.

Unser Beispiel beruht auf dem vorangehenden § 2. Es lautet, wenn

$$m = m_\nu = 2^{\nu^2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt und dann $d_{m,\mu}$ durch (6) definiert wird,

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu\sqrt{\nu}} e^{-\nu s} \sum_{\mu=0}^{m^2-1} d_{m,\mu} (e^{-m^{-2}(s+\nu)})^\mu.$$

Hierin steht, zunächst rein formal, rechts eine Dirichletsche Reihe (1), bei der für $\nu = 1, 2, \ldots$ die Glieder mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ zusammengefaßt sind zu einer Gruppe, die bis auf den Faktor $2^{-\nu\sqrt{\nu}} e^{-\nu s}$ ein singuläres Polynom

$$G_{m^2}(e^{-m^{-2}(s+\nu)})$$

vorstellt. Diese Dirichletsche Reihe hat die behaupteten Eigenschaften:

Einerseits ist $\gamma = -\infty$. Denn dazu genügt es zu beweisen, daß, und zwar gleichmäßig in jeder Halbebene $\sigma > \eta'$,

a) $\sum_\nu$ konvergiert,

b) $\Omega_\nu = \underset{\nu \leqq \lambda_\nu < \nu+1}{\text{Maximum}} \left| \sum_{\nu \leqq \lambda_n \leqq \lambda_\nu} a_n e^{-\lambda_n s} \right| \to 0.$

Ersteres aber folgt daraus, daß für $\sigma > \eta'$ und $\nu > -\eta'$ (also $\sigma + \nu > 0$) wegen (8) in $\sum_\nu$ das allgemeine Glied absolut genommen

$$= 2^{-\nu\sqrt{\nu}} e^{-\nu\sigma} |G_{m^2}(e^{-m^{-2}(s+\nu)})| \leqq (2^{-\sqrt{\nu}} e^{-\eta'})^\nu.$$

Und letzteres ergibt sich daraus, daß für dieselben σ und ν bei passendem $M \leqq m^2 - 1$

$$\left| \sum_{\nu \leqq \lambda_n \leqq \lambda_\nu} a_n e^{-\lambda_n s} \right| = 2^{-\nu\sqrt{\nu}} e^{-\nu\sigma} \left| \sum_{\mu=0}^{M} d_{m,\mu} (e^{-m^{-2}(s+\nu)})^\mu \right|,$$

also wegen (8) bekanntlich[8])

$$\Omega_\nu \leqq 2^{-\nu\sqrt{\nu}} e^{-\nu\eta'} \cdot O(\log m^2) \leqq 2^{-\nu\sqrt{\nu}+O(\nu)} \to 0.$$

Es ist also in der Tat $\gamma = -\infty$.

Andererseits ist bei $0 < \varkappa < 2$ und jedem festen σ mit Rücksicht auf (7)

$$\sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} |a_n e^{-\lambda_n \sigma}|^\varkappa = 2^{O(\nu^2)} \sum_{\mu=0}^{m^2-1} |d_{m,\mu}|^\varkappa = 2^{O(\nu^2)} \cdot m^{2-\varkappa} = 2^{(2-\varkappa)\nu^2 + O(\nu^2)} \to \infty,$$

und daher (11) erfüllt.

[8]) Vgl. beispielsweise Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie [Berlin 1916], § 2.

§ 4.

Zum absoluten Konvergenzproblem.

Es sei (neben den in der Einleitung angeführten Bezeichnungen) η jenige Zahl, die hier, wie schon anderwärts[9]), kurz Beschränktheitsszisse heißen soll und dadurch festliegt, daß $f(s)$ bei jedem $\eta' > \eta$ w. $'\eta < \eta$ in der Halbebene $\sigma > \eta'$, dagegen nicht in der Halbebene $> {}'\eta$ regulär und beschränkt ist. Dann ist offenbar

$$-\infty \leqq \eta \leqq \gamma \leqq \beta \leqq \infty.$$

Aus dem Satze des Herrn Carlson[7]), der den Gegenstand des § 3 det, erlaubt daher bei $\eta' > \eta$ die Cauchysche Ungleichung

$$\left\{\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}\right\}^2 \leqq \sum_{n=1}^{N} |a_n e^{-\lambda_n \eta'}|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda_n 2(\sigma-\eta')}$$

ne weiteres zu schließen:

Wenn $2\beta^*$ die absolute Konvergenzabszisse der Reihe

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s}$$

deutet, so ist bei den Dirichletschen Reihen (1) *dieses selben Typus stets*

3) $$\beta - \eta \leqq \beta^*.$$

Daher ist die obere Grenze $\bar{\varrho}$ der Zahlen $\beta - \eta$ für alle Reihen eines ypus eine Funktion desselben. von der zunächst

4) $$0 \leqq \bar{\varrho} \leqq \beta^*$$

itsteht. Die Bestimmung von $\bar{\varrho}$ bei gegebenem Typus ist der eigentliche egenstand des absoluten Konvergenzproblems. Zu diesem wollen wir er einen Beitrag liefern, indem wir zeigen:

Bei gegebenem $\beta^* > 0$ kann $\bar{\varrho}$ jeden mit (14) *verträglichen Wert tsächlich annehmen*, d. h. es gibt zu β^* und $\bar{\varrho}$ einen λ-Typus, so daß

5) für seine Reihen (1) stets $\beta - \eta \leqq \bar{\varrho}$,

d

6) für eine spezielle Reihe $\beta - \eta = \bar{\varrho}$

t ($\bar{\varrho}$ ist also sogar Maximum).

Den Nachweis dieser Behauptung zerlegen wir in mehrere Schritte:

1. *Im Falle $\bar{\varrho} = 0$* bedarf nur (15) eines Beweises, der enthalten ist

[9]) Vgl. die unter [4]) zitierte Arbeit, § 1.

in dem von Herrn Bohr[10]) bewiesenen Satze: Bei linear unabhängiger Exponentenfolge ist $\beta = \eta$.

2. *Im Falle* $\bar{\varrho} = \beta^*$ ist (15) mit (13) identisch, also für jedes β^* bekannt, so daß nach Angabe des λ-Typus nur noch (16) der Bestätigung bedarf.

Beschränken wir uns dabei der Kürze halber auf $\beta^* < \infty$ (falls $\beta^* = \infty$ ist, braucht man nur in der folgenden Formel $\bar{\varrho}$ durch ν zu ersetzen), so ist, wenn

$$m = m_\nu = [e^{\bar{\varrho}\nu}] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

gesetzt und dann $d_{m\mu}$ durch (6) erklärt wird, λ-Typus und spezielle Reihe gegeben durch

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-3} e^{-\nu s} \sum_{\mu=0}^{m^2-1} d_{m\mu} (e^{-m^{-2}s})^\mu.$$

Hierin steht, zunächst formal, rechts eine Dirichletsche Reihe (1), bei der für $\nu = 1, 2, \ldots$ die Glieder mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ zusammengefaßt sind zu einer Gruppe, die bis auf den Faktor $\nu^{-3} e^{-\nu s}$ ein singuläres Polynom

$$G_{m^2}(e^{-m^{-2}s})$$

vorstellt.

Bei unserem λ-Typus ist nun zunächst, wie es sein soll, $2\beta^*$ die Konvergenzabszisse der Reihe (12). Denn bei festem $s > 0$ ist (mit passendem $\vartheta \geqq 0$, $\leqq 1$) für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$(17) \qquad \sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} e^{-\lambda_n s} = e^{-(\nu+\vartheta)s} \cdot m^2 = e^{-\nu(s-2\bar{\varrho})+O(1)}.$$

Weiter ist bei unserer Dirichletschen Reihe $\alpha < \infty$ und sogar $\gamma \leqq 0$. Dies ist bewiesen, sobald die Punkte a) und b) des § 3 gelten, gleichmäßig für $\sigma > 0$. Es ist aber dort für $\nu = 1, 2, \ldots$ einerseits, wegen (8),

$$\Big| \sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} a_n e^{-\lambda_n s} \Big| = \nu^{-3} e^{-\nu\sigma} |G_{m^2}(e^{-m^{-2}s})| \leqq 1/\nu^3,$$

andererseits[8])

$$\Omega_\nu \leqq \nu^{-3} e^{-\nu\sigma} \cdot O(\log m^2) = \nu^{-3} O(\nu^2) \to 0,$$

also Punkt a) und b) ersichtlich.

Und endlich gilt einerseits $\eta \leqq \gamma \leqq 0$; andererseits ist $\beta \geqq \bar{\varrho}$, da bei $0 < \sigma < \bar{\varrho}$ wegen (7)

---

[10]) Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen [Acta math. **36** (1913), S. 197–240], vgl. auf S. 228 das Ende von § 6.

$$\sum_{\nu \leq \lambda_n < \nu+1} |a_n e^{-\lambda_n s}| \geqq \nu^{-3} e^{-(\nu+1)\sigma} \sum_{\mu=0}^{m^2-1} |d_{m\mu}|$$

$$= \nu^{-3} e^{-(\nu+1)\sigma} \cdot \frac{1}{4} m = e^{\nu(\bar{\varrho}-\sigma)+o(\nu)} \to \infty.$$

ist also $\beta - \eta \geqq \bar{\varrho}$ und damit wegen (15)

8) $$\beta - \eta = \bar{\varrho}.$$

3. Hilfssatz. Bei einer Dirichletschen Reihe (1) sei in der xponentenfolge eine linear unabhängige Teilfolge enthalten, und $\varepsilon_n = 0$, ls λ_n derselben angehört, sonst $\varepsilon_n = 1$, sowie $2\beta^{**}$ die Konvergenz-szisse der Reihe

9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\lambda_n s},$$

so $0 \leqq \beta^{**} \leqq \beta^*$. Wenn dann $f(s)$ regulär und beschränkt ist für $\cdot 0$, so konvergiert Reihe (1) absolut für $\sigma > \beta^{**}$.

Beweis. Nach dem oben genannten Satze des Herrn Carlson[7]) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und damit $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n |a_n|^2$ konvergent, desgleichen also

0) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n |a_n e^{-\lambda_n s}| \leqq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n |a_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\lambda_n 2\sigma}} \quad \text{für} \quad \sigma > \beta^{**}.$$

e Funktion

$$f(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) a_n e^{-\lambda_n s}$$

daher regulär und beschränkt in jeder Halbebene $\sigma > \eta' > \beta^{**}$, und hat die letztstehende Dirichletsche Reihe nach Weglassung von Nullen ne linear unabhängige Exponentenfolge. Nach dem unter 1. genannten tze des Herrn Bohr[10]) ist daher auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) |a_n e^{-\lambda_n s}| \text{ konvergent für } \sigma > \beta^{**},$$

as in Verbindung mit (20) die Behauptung ergibt.

4. *Im Falle* $0 < \bar{\varrho} < \beta^*$ soll der λ-Typus die Exponenten des unter 2. der Zahl $\bar{\varrho}$ angegebenen Typus enthalten, denen wir noch für $\nu = 1, 2, \ldots$ s dem Intervall

1) $$\nu + 1 - \frac{1}{m^2} < \lambda < \nu + 1$$

nau $[e^{2\beta^* \nu}] - m^2 (\geqq 0)$ Zahlen hinzufügen[11]), deren jede von allen voran-henden linear unabhängig ist.

[11]) Falls $\beta^* = \infty$, ist im Exponenten $2\beta^*$ durch ν zu ersetzen

Dann ist zunächst $2\beta^*$ die Konvergenzabszisse der Reihe (12), da die Anzahl der λ_n mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ genau $[e^{2\beta^* \nu}]$ beträgt, so daß sich bei festem $s > 0$ und $\nu = 1, 2, \ldots$ analog zu (17) ergibt

$$\sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} e^{-\lambda_n s} = e^{-(\nu+0)s} \cdot [e^{2\beta^* \nu}] = e^{-\nu(s-2\beta^*)+O(1)}.$$

Ferner ist im Sinne des Hilfssatzes, wenn wir zu der linear unabhängigen Teilfolge die λ_n aus den Intervallen (21) zusammenfassen, $\beta^{**} = \bar{\varrho}$ nach (17).

Bei gegebenem η ist daher für jedes $\eta' > \eta$, da

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \eta'} \cdot e^{-\lambda_n (s-\eta')}$$

regulär und beschränkt ist in der Halbebene $\sigma - \eta' > 0$, nach dem Hilfssatze die letztere Reihe, d. h. (1), absolut konvergent für $\sigma - \eta' > \beta^{**} = \bar{\varrho}$. Es ist also (15) bei unserem λ-Typus erfüllt.

Und endlich zeigt die unter 2. angegebene Reihe, die ja unter den gegenwärtigen λ-Typus fällt, wegen (18) die Richtigkeit von (16).

Göttingen, den 30. November 1921.

(Eingegangen am 1. Dezember 1921.)

Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze.

(Orthogonalprojektionen von Haupttangentenkurven.)

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Die Bedingung dafür, daß ein die Ebene doppelt überdeckendes Kurvennetz, gegeben durch die Gleichung zweiten Grades

$$A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2 = 0$$

aufgefaßt werden kann als Projektion der Haupttangentenkurven einer Fläche, läßt sich leicht aufstellen. Es müssen dann eben A, B und C proportional sein zu den zweiten Differentialquotienten r, s, t einer Funktion $z(x, y)$, da diese Projektionen die bekannte Differentialgleichung

$$r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2 = 0$$

erfüllen. Diese Bedingung, also ein Integrabilitätskriterium[1]), ist *analytisch* weitgehend verfolgt worden, indessen scheint die (in § 2 abgeleitete) charakteristische *geometrische Eigenschaft* eines solchen Netzes, das wir als *H-Netz* bezeichnen wollen, noch nicht beachtet worden zu sein.

Wir beginnen zur Vorbereitung mit der in § 1 besprochenen „Polaren der H-Netze", leiten dann in § 2 die charakteristische Eigenschaft ab und zeigen in § 3 die geometrische Deutung einiger partieller Differentialgleichungen sowie einen Zusammenhang mit den Voßschen Netzen.

§ 1.

Die Polarenbeziehung der H-Netze.

Es sei

1) $$r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2 = 0$$

---

[1]) Man erhält aus $r = \lambda A$, $s = \lambda B$, $t = \lambda C$ durch Differentiation und Elimination von λ eine einzige Gleichung, die außer A, B, C noch die ersten und zweiten Differentialquotienten enthält. Im übrigen vgl. man: Enc. d. math. Wissensch. III D 3 (R. v. Lilienthal) Nr. 36 und III D 6a (A. Voß) Nr. 10.

die Differentialgleichung eines H-Netzes, d. h. der Projektionen der Haupttangentenkurven einer Fläche auf die xy-Ebene. Die Richtungen φ_1, φ_2 der beiden durch $P(x, y)$ gehenden Kurven H_1, H_2 des Netzes sind dann gegeben durch

$$r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi = 0. \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{2s}{t}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{r}{t},$$

wofür man unter Verwendung eines Proportionalitätsfaktors ϱ auch schreiben kann

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \varrho r, \quad \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -2\varrho s, \quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \varrho t. \tag{3}$$

Sodann nehmen wir auf H_1 den Nachbarpunkt

$$P_1(x + d\sigma_1 \cos\varphi_1,\ y + d\sigma_1 \sin\varphi_1)$$

und ziehen in P und P_1 die Tangenten an die hindurchgehenden Kurven H_2; es soll die Grenzlage

$$Q_2(x + u_2\cos\varphi_2,\ y + u_2\sin\varphi_2)$$

des Schnittpunktes dieser beiden H_2-Tangenten bestimmt werden, ebenso dann der entsprechende Punkt

$$Q_1(x + u_1\cos\varphi_1,\ y + u_1\sin\varphi_1).$$

Um Q_2 zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung

$$r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = 0 \tag{2'}$$

des in P berührenden Tangentenpaares nach der Bogenlänge σ_1 der H_1-Kurve. Schreibt man für die dritten Differentialquotienten

$$v_1 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad v_2 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$v_3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad v_4 = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial t}{\partial y},$$

so kommt

$$\begin{aligned}(v_1\cos\varphi_1 + v_2\sin\varphi_1)(\xi - x)^2 + 2(v_2\cos\varphi_1 + v_3\sin\varphi_1)(\xi - x)(\eta - y)\\ + (v_3\cos\varphi_1 + v_4\sin\varphi_1)(\eta - y)^2 - 2[r(\xi - x)\cos\varphi_1 + s((\xi - x)\sin\varphi_1\\ + (\eta - y)\cos\varphi_1) + t(\eta - y)\sin\varphi_1] = 0.\end{aligned}$$

Um hieraus Q_2 zu bestimmen, setzen wir

$$\xi_2 = x + u_2\cos\varphi_2, \qquad \eta_2 = y + u_2\sin\varphi_2 \tag{4}$$

und erhalten nach Abspaltung des Faktors u_2 die Gleichung

$$\begin{aligned}u_2[&\cos\varphi_2(v_1\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + v_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + v_3\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &+ \sin\varphi_2(v_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + v_3\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + v_4\sin\varphi_1\sin\varphi_2)]\\ &- 2(r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + s\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + t\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = 0.\end{aligned}$$

nter Beachtung von (3) und (4) kann man hierfür schreiben

$$(\xi_2 - x)(v_1 t - 2v_2 s + v_3 r) + (\eta_2 - y)(v_2 t - 2v_3 s + v_4 r) - 4(rt - s^2) = 0.$$

ierin sind die Koeffizienten von $(\xi_2 - x)$ und $(\eta_2 - y)$ die Differential-uotienten von

$$U = rt - s^2$$

ach x und y.

Es hat sich also ergeben: Q_2 ist der Schnittpunkt der Geraden

5) $$(\xi - x)U_x + (\eta - y)U_y - 4U = 0 \quad (U = rt - s^2)$$

it der H_2-Tangente

4′) $$(\xi - x)\sin\varphi_2 - (\eta - y)\cos\varphi_2 = 0,$$

der auch: Man erhält die Koordinaten $\xi_2 \eta_2$ von Q_2, wenn man aus (5) it Verwendung von (4) u_2 berechnet.

Die symmetrische Form der Gleichung (5) zeigt, daß man Q_1 erhält, ndem man (5) mit der H_1-Tangente

4″) $$(\xi - x)\sin\varphi_1 - (\eta - y)\cos\varphi_1 = 0$$

um Schnitt bringt, oder auch in (5) einsetzt

$$\xi = \xi_1 = x + u_1 \cos\varphi_1, \qquad \eta = \eta_1 = y + u_1 \sin\varphi_1$$

nd zunächst u_1 berechnet.

Wir wollen die Gerade (5), auf der sowohl Q_1 wie Q_2 liegen, die *Polare des Punktes* $P(x, y)$ in bezug auf das H-Netz nennen und uns re Bedeutung nochmals genau einprägen.

Man denke sich durch P die beiden Netzkurven H_1 und H_2 gelegt, dann durch die Punkte von H_1 die Tangenten an die hindurchgehenden H_2-Kurven gezogen und durch die Punkte von H_2 die Tangenten an die H_1-Kurven. Beide Geradenscharen umhüllen je eine Kurve L_2 und L_1. s seien ferner Q_2 und Q_1 die Berührungspunkte von L_2 und L_1 mit der on P ausgehenden H_2- und H_1-Tangente. Q_2 und Q_1 liegen dann beide uf den Geraden (5) und die Strecken $u_2 = PQ_2$ und $u_1 = PQ_1$ können n der oben angegebenen Weise linear bestimmt werden aus (5), (4′) und 4″), wenn die quadratische Gleichung (2) aufgelöst ist.

Wir kommen später in § 3 auf die durch (5) gegebene Polaren-uordnung zurück.

§ 2.

Der H-Kegelschnitt des Punktes P.

Wir wollen nun zur Bestimmung der Krümmungselemente der Hüll-urven L_1 und L_2 fortschreiten und brauchen die Rechnung nur für die durch

$$\xi_1 = x + u_1 \cos\varphi_1, \qquad \eta_1 = y + u_1 \sin\varphi_1$$

gegebene L_1-Kurve durchzuführen. Bezeichnen wir die Differentialquotienten nach der Bogenlänge σ_2 der H_2-Kurve durch Akzente, so wird

$$\xi' = \cos\varphi_2 + u_1' \cos\varphi_1 - u_1 \sin\varphi_1 \varphi_1',$$
$$\eta_1' = \sin\varphi_2 + u_1' \sin\varphi_1 + u_1 \cos\varphi_1 \varphi_1'.$$

Andererseits ist L_1 umhüllt von den Geraden

$$(\xi - x)\sin\varphi_1 - (\eta - y)\cos\varphi_1 = 0,$$

daher

$$-\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + ((\xi_1 - x)\cos\varphi_1 + (\eta_1 - y)\sin\varphi_1)\varphi_1' = 0$$

oder

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + u_1 \varphi_1' = 0. \tag{6}$$

Mit Verwendung von (6) erhält man dann

$$\xi_1' = \lambda_1 \cos\varphi_1, \quad \eta_1' = \lambda_1 \sin\varphi_1, \tag{7}$$

womit nur ausgedrückt ist, daß die L_1-Kurve die von P ausgehende H_1-Tangente berührt, und außerdem

$$\lambda_1 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u_1'. \tag{8}$$

Die zweiten Differentialquotienten, die für die Bestimmung des Krümmungselementes von L_1 erforderlich sind, werden dann

$$\xi_1'' = \lambda_1' \cos\varphi_1 - \lambda_1 \sin\varphi_1 \varphi_1', \quad \eta_1'' = \lambda_1' \sin\varphi_1 + \lambda_1 \cos\varphi_1 \varphi_1'. \tag{9}$$

Wir wollen jetzt den Kegelschnitt bestimmen, der L_1 in Q_1 oskuliert und L_2 in Q_2 berührt. (Später werden wir sehen, daß er auch L_2 oskuliert.) Die Forderung, daß er L_1 in Q_1, L_2 in Q_2 berühren soll, daß also (5) seine Polare für den Punkt $P(x, y)$ sein soll und die beiden von P ausgehenden Tangenten (2′) des H-Netzes ihn in ihren Schnittpunkten Q_1, Q_2 mit (5) berühren sollen, schreibt die Gleichungsform vor

$$r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 + K((\xi - x)U_x + (\eta - y)U_y - 4U)^2 = 0, \tag{10}$$

und es ist K nach der Oskulationsforderung anzupassen.

Zu diesem Zweck hat man (unter Festhaltung der Parameter x, y) für ξ und η einzusetzen ξ_1 und η_1 und zweimal nach σ_2 zu differenzieren, wobei (7) und (8) zu beachten sind. Die erste Differentiation ergibt

$$2(r\xi_1'(\xi_1 - x) + s(\xi_1'(\eta_1 - y) + \eta_1'(\xi_1 - x)) + t\eta_1'(\eta_1 - y)) + 2K((\xi_1 - x)U_x + (\eta_1 - y)U_y - 4U)(U_x\xi_1' + U_y\eta_1') = 0.$$

Diese Gleichung ist, wie leicht nachzuprüfen, identisch erfüllt, und das muß so sein, weil ja der Kegelschnitt doch L_1 in Q_1 berührt.

Differenziert man nochmals, so kommt

$$r\xi_1''(\xi_1 - x) + s(\xi_1''(\eta_1 - y) + \eta_1''(\xi_1 - x)) + t\eta_1''(\eta_1 - y) + r\xi_1'^2 + 2s\xi_1'\eta_1' + t\eta_1'^2 + K(U_x\xi_1' + U_y\eta_1')^2 = 0.$$

ier ist die Summe der ersten drei Glieder der zweiten Zeile wegen (7) id (2) gleich Null; die erste Zeile wird wegen (9) und (4″)

$$u_1((\lambda_1'\cos\varphi_1 - \lambda_1\sin\varphi_1\varphi_1')(r\cos\varphi_1 + s\sin\varphi_1) + (\lambda_1'\sin\varphi_1 + \lambda_1\cos\varphi_1\varphi_1')(s\cos\varphi_1 + t\sin\varphi_1)) = u_1\varphi_1'\lambda_1(s(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + (t - r)\sin\varphi_1\cos\varphi_1).$$

Zur Bestimmung von K haben wir also jetzt die Gleichung

$$u_1\varphi_1'(s(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + (t - r)\sin y_1\cos\varphi_1) + K\lambda_1(U_x\cos\varphi_1 + U_y\sin\varphi_1)^2 = 0,$$

id können nach (6) für das erste Glied schreiben

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(s(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + (t - r)\sin\varphi_1\cos\varphi_1)$$

id diesen unsymmetrischen Ausdruck symmetrisch machen, indem wir

$$0 = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)(r\cos^2\varphi_1 + 2s\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + t\sin^2\varphi_1)$$

nzufügen; er wird dann

$$-(r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + s\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + t\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

ler wegen (3) gleich

$$-2\varrho(rt - s^2) = -2\varrho U.$$

Es ist nun noch

$$\lambda_1(U_x\cos\varphi_1 + U_y\sin\varphi_1)^2$$

nzuformen. Hierin ist wegen (8) zu setzen

$$\lambda_1 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u_1';$$

' ist durch Differentiation aus

$$u_1(U_x\cos\varphi_1 + U_y\sin\varphi_1) - 4U = 0$$

ach σ_2 zu gewinnen, also aus

$$u_1'(U_x\cos\varphi_1 + U_y\sin\varphi_1) - 4(U_x\cos\varphi_2 + U_y\sin\varphi_2) + u_1(\cos\varphi_1(U_{xx}\cos\varphi_2 + U_{xy}\sin\varphi_2) + \sin\varphi_1(U_{xy}\cos\varphi_2 + U_{yy}\sin\varphi_2)) + u_1\varphi_1'(-U_x\sin\varphi_1 + U_y\cos\varphi_1) = 0.$$

ie zweite Zeile wird wegen (3)

$$\varrho u_1(U_{xx}t - 2U_{xy}s + U_{yy}r),$$

rner ist in der dritten Zeile zu beachten (6)

$$u_1\varphi_1' = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und man erhält so schließlich

$$\begin{aligned}\lambda_1(U_x\cos\varphi_1+U_y\sin\varphi_1)&=\cos(\varphi_1-\varphi_2)(U_x\cos\varphi_1+U_y\sin\varphi_1)\\&+4(U_x\cos\varphi_2+U_y\sin\varphi_2)\\&-u_1\varrho(U_{xx}t-2U_{xy}s+U_{yy}t)\\&-\sin(\varphi_1-\varphi_2)(-U_x\sin\varphi_1+U_y\cos\varphi_1).\end{aligned}$$

K erhält man also aus der Gleichung

$$\begin{aligned}-2\varrho U+K(U_x\cos\varphi_1+U_y\sin\varphi_1)(5(U_x\cos\varphi_2+U_y\sin\varphi_2)\\-u_1\varrho(U_{xx}t-2U_{xy}s+U_{xy}r))=0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(11)\quad -2U+K[5(U_x^2t-2U_xU_ys+U_y^2r)-4U(U_{xx}t-2U_{xy}s\\+U_{yy}r)]=0.\end{aligned}$$

In dieser Gleichung treten φ_1, φ_2, u_1 und u_2 nicht auf, sie ist vollkommen symmetrisch. Hieraus folgt aber, daß die Aufgabe, den Kegelschnitt (10) so zu bestimmen, daß er die Hüllkurve L_2 in Q_2 oskuliert, auf genau dieselbe Gleichung (11) für K führen muß.

Dieses Ergebnis kann durch Reihenentwicklung bei dem einfachen Beispiel

$$r=a_1x+a_2y+\frac{1}{2}(b_1x^2+2b_2xy+b_3y^2)+\ldots$$

$$s=1+a_2x+a_3y+\frac{1}{2}(b_2x^2+2b_3xy+b_4y^2)+\ldots$$

$$t=a_3x+a_4y+\frac{1}{2}(b_3x^2+2b_4xy+b_5y^2)+\ldots$$

bestätigt werden, ein Beispiel, an dem der Satz zuerst festgestellt worden ist, bevor die allgemeine Untersuchung in Angriff genommen wurde. Hier sind die H-Tangenten des Nullpunktes *rational* gegeben (x- und y-Achse) und die Punkte

$$Q_1\ldots\xi_1=\frac{2}{a_2},\qquad\eta_1=0$$

$$Q_2\ldots\xi_2=0,\qquad\eta_2=\frac{2}{a_3}$$

ebenfalls rational bestimmt, überhaupt war die Rechnung rational durchzuführen, und der Umstand, daß die Gleichungen

$$(10')\qquad 2\xi\eta+16K\left(\frac{a_2}{2}\xi+\frac{a_3\eta}{2}-1\right)^2=0,$$

$$(11')\qquad 1+16K\left(\frac{b_3}{2}-\frac{a_1a_4}{4}-a_3a_3\right)=0$$

zur Bestimmung des die Hüllkurve L_1 in Q_1 oskulierenden und L_2 in Q_2 berührenden Kegelschnittes durch Vertauschung von a_1 mit a_4 und a_2 mit a_3 in (11′) sich nicht ändern, ließ erkennen, daß der Kegelschnitt auch L_2 in Q_2 oskuliert.

Ohne die vorausgehende Untersuchung eines solchen Beispiels wäre r allgemeine Satz gar nicht Gegenstand der Untersuchung geworden.

Die charakteristische Eigenschaft der H-Kurven ist in dem Satz iedergegeben:

Durch das H-Netz wird jedem Punkt $P(x, y)$ ein Kegelschnitt 0), (11) *zugeordnet. Um ihn zu erhalten, ziehe man durch $P(x, y)$ e beiden H-Kurven H_1 und H_2. Sodann lege man durch P und zwei nachbarte Punkte auf H_1 die Tangenten der H_2-Kurven und durch und zwei benachbarte Punkte auf H_2 die Tangenten an die H_1-Kurven. iese sechs Geraden, zweimal je drei, berühren den Kegelschnitt.*

Die zweimal je drei unendlich benachbarten Haupttangenten, deren ojektionen die zur Konstruktion des H-Kegelschnittes von $P(x, y)$ nützt worden sind, liegen auf der Lieschen F_2 [2]) des Flächenpunktes, d vielleicht hat Lie diese zweimal je drei benachbarte Haupttangenten thaltende Fläche auf diesem Wege gefunden, nämlich durch Unterchung der Projektion.

Unser „H-Kegelschnitt" ist dann der scheinbare Umriß der Lieschen ,, nämlich der Schnitt ihres zur xy-Ebene senkrechten Tangentialinders mit dieser Ebene.

Schließlich ist noch die Tatsache bemerkenswert, daß unser Kriterium r ein H-Netz, nämlich die Existenz des die beiden Hüllkurven L_1 und L_2 kulierenden Kegelschnitts, *projektiv invariant ist.*

Hieraus folgt: Ist

$$A(x,y)dx^2 + 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dy^2 = 0$$

s auf einen Faktor λ identisch mit

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

nn bleibt diese Eigenschaft bei projektiver Transformation erhalten.

---

[2]) Vgl. P. Franck, Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 13 (1914), S. 110–127 und G. Scheffers, Über zwei mit einem ächenpunkte verknüpfte Flächen 2. O., ebenda 14 (1915), S. 68—79. Eine andere leitung der Lieschen F_2 mit Verwendung homogener Koordinaten gibt F. Engel den Anmerkungen zu Lies gesammelten Abhandlungen (noch nicht erschienen). satz bei der Korrektur: Engels Ableitung der Lieschen F_2 ist inzwischen in r Math. Zeitschrift 11 (1921), S. 301–304 mitgeteilt worden als Anhang zu einer beit von P. Franck.

§ 3.

Die Differentialgleichung $s^2 - rt = a^2$.

Man kann jetzt leicht unterscheiden, von welcher Beschaffenheit eine Punktgeradenzuordnung der xy-Ebene

$$(\xi - x)A(x,y) + (\eta - y)B(x,y) + C(x,y) = 0$$

sein muß, damit diese Geraden als H-Polaren der Punkte $P(x,y)$ aufgefaßt werden können. Notwendig und hinreichend ist wegen (5), daß die Beziehungen bestehen

$$\frac{U_x}{A} = \frac{U_y}{B} = -\frac{4U}{C},$$

woraus die Bedingung folgt

$$A_y C - C_y A = B_x C - C_x B.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist

$$U = rt - s^2$$

durch Quadraturen bestimmt bis auf einen konstanten Faktor. *Alle partiellen Differentialgleichungen*

$$rt - s^2 = kW(x,y) \tag{12}$$

mit demselben W aber beliebigem k ergeben dann in der xy-Ebene dieselbe Polarität, d. h.: Projiziert man irgendeine dieser Flächen auf die xy-Ebene und legt durch die Grundrisse P der Flächenpunkte die Grundrisse H_1, H_2 der Haupttangentenkurven, bestimmt ferner den Schnittpunkt Q_1 zweier Haupttangentenrisse t_1, t'_1, die von P und dem unendlich benachbarten Punkt auf H_2 ausgehen und entsprechend Q_2, so ist die H-Polare von P, das ist die Gerade $Q_1 Q_2$, für alle Integralflächen von (12) dieselbe.

Von besonderem Interesse sind hier noch die Differentialgleichungen

$$s^2 - rt = a^2; \tag{13}$$

bei ihnen ist

$$U_x = U_y = 0,$$

die H-Polare geht daher in die unendlich ferne Gerade über, das heißt: Die Richtungen der H_1-Kurven in den Schnittpunkten mit einer H_2-Kurve sind gleich, ebenso die Richtungen aller H_2-Kurven in den Schnittpunkten mit einer H_1-Kurve. Dies ist aber die charakteristische Eigenschaft eines Voßschen ebenen Netzes[3]). Somit haben wir den Satz:

[3]) Enc. d. math. Wissensch. III D 3 Nr. 40. Äquidistante Kurvenscharen.

Die Projektionen der Haupttangentenkurven der Integralflächen von

$$s^2 - rt = a^2$$

lden in der xy-Ebene ein Voßsches Netz.

Wir wollen auf diese Eigenschaft noch mit einigen Worten eingehen.

Der Definition nach sind die Kurven eines Voßschen Netzes bestimmt durch

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + dv^2 + 2f\,du\,dv.$$

Hieraus folgt

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 1$$

d wegen

$$x_1 x_{12} + y_1 y_{12} = 0,$$

$$x_2 x_{12} + y_2 y_{12} = 0,$$

d

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$$

iter

$$x_{12} = y_{12} = 0.$$

Man kann also ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen

$$dx = -\sin U\,du - \sin V\,dv, \qquad U = U(u),$$

$$dy = \cos U\,du + \cos V\,dv, \qquad V = V(v),$$

d erhält so *jedes* Voßsche ebene Netz.

Es ist dann von einem Faktor abgesehen

$$du\,dv$$

eich

$$dx^2 \cos U \cos V + dx\,dy \sin(U + V) + dy^2 \sin U \sin V,$$

d man leicht nachweisen, daß

$$r = a\frac{2\cos U \cos V}{\sin(V-U)}, \qquad s = a\frac{\sin(V+U)}{\sin(V-U)}, \qquad t = a\frac{2\sin U \sin V}{\sin(V-U)}$$

integrables System bilden, d. h. es ist

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

d überdies

$$s^2 - rt = a^2.$$

Die weitere Integration ergibt

$$p = a\left(\int \cos U\,du - \int \cos V\,dv\right)$$

$$q = a\left(\int \sin U\,du - \int \sin V\,dv\right)$$

und man erhält

$$z = \int (q\cos U - p\sin U)\,du + \int (q\cos V - p\sin V)\,dv$$

durch Quadraturen.

Hierzu möge noch ein einfaches Beispiel gegeben werden. Wir setzen

$$(14)\qquad \begin{cases} x = \cos u + \cos v, \\ y = \sin u + \sin v, \end{cases}$$

so daß die Projektionen der Haupttangentenkurven auf die xy-Ebene die Kreise sind, die durch den Nullpunkt gehen und den Radius 1 besitzen.

Es wird dann

$$p = a(\sin u - \sin v),$$

$$q = a(-\cos u + \cos v),$$

$$dz = p(-\sin u\,du - \sin v\,dv) + q(+\cos u\,du + \cos v\,dv)$$

$$= a(dv - du)(1 - \cos(v - u)),$$

$$(15)\qquad z = a(v - u - \sin(v - u)).$$

Die entstehende Fläche (14), (15) läßt sich auch so darstellen:

$$x = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v-u}{2}$$

$$y = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{v-u}{2}$$

$$z = a(v - u - \sin(v - u))$$

ist also Rotationsfläche und zwar von ähnlicher Gestalt, wie die spindelförmige Drehfläche konstanter negativer Krümmung mit Achsendurchsetzung $[v + u = (2n+1)\pi]$ und Rückkehrkanten $(v - u = 2n\pi)$.

(Eingegangen am 31. Januar 1922.)

Über die lineare Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Variablen.

Von

Wolfgang Sternberg in Heidelberg.

Einleitung.

Liegen m reelle oder komplexe Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ r reellen Variablen x vor, welche sämtlich in einem gewissen Intervalle $\leqq x \leqq b$ Ableitungen bis zur $(m-1)$-ten Ordnung einschließlich be-zen, so muß im Falle der linearen Abhängigkeit dieser Funktionen die ronskische Determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_1'(x), & \ldots, & f_1^{(m-1)}(x) \\ \vdots & & & \\ f_m(x), & f_m'(x), & \ldots, & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$a \leqq x \leqq b$ identisch verschwinden. Diese Bedingung ist jedoch nicht reichend, wie schon das für $m = 2$ in irgendeinem Intervalle $a < 0 < b$ ltende Beispiel [1])

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \leqq x \leqq 0, \\ x^2 & \text{„} \quad 0 \leqq x \leqq b, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{„} \quad a \leqq x \leqq 0, \\ 0 & \text{„} \quad 0 \leqq x \leqq b \end{cases}$$

gt. Setzt man aber noch voraus, daß die auf die $m-1$ Funktionen $x), \ldots, f_{m-1}(x)$ bezügliche Wronskische Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_1'(x), & \ldots, & f_1^{(m-2)}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{m-1}(x), & f_{m-1}(x), & \ldots, & f_{m-1}^{(m-2)}(x) \end{vmatrix}$$

[1]) Vgl. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, 273 ff.

an keiner Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ verschwindet, so ergibt sich der Tat die lineare Abhängigkeit und zwar in der Form

$$f_m(x) \equiv c_1 f_1(x) + \ldots + c_{m-1} f_{m-1}(x),$$

wo die c_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ Konstante sind.

Sind andrerseits $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ analytische Funktionen der ko plexen Variablen x, die sich sämtlich in einem gewissen Gebiete S d x-Ebene regulär verhalten, so ist das in S identische Verschwinden von nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend für die lineare Abhängigke

Diese Sätze sollen auf m Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ von n Variabl $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verallgemeinert werden[3]). Dabei werden wir Determinant der folgenden Form benutzen, die wir als Wronskische Determinant im weiteren Sinne bezeichnen wollen:

$$D = \begin{vmatrix} f_1, & \dfrac{\partial^{\nu_1} f_1}{\partial x_1^{p_{11}} \partial x_2^{p_{12}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{\nu_{m-1}} f_1}{\partial x_1^{p_{m-1,1}} \partial x_2^{p_{m-1,2}} \ldots \partial x_n^{p_{m-1,n}}} \\ \vdots & & & \\ f_m, & \dfrac{\partial^{\nu_1} f_m}{\partial x_1^{p_{11}} \partial x_2^{p_{12}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{\nu_{m-1}} f_m}{\partial x_1^{p_{m-1,1}} \partial x_2^{p_{m-1,2}} \ldots \partial x_n^{p_{m-1,n}}} \end{vmatrix}.$$

Hierin sind die ν_i alle möglichen ganzen nur durch die Ungleichun $1 \leqq \nu_i \leqq m-1$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ beschränkten Zahlen und es $p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in} = \nu_i$. Da eine Wronskische Determinante st durch Angabe einer Zeile bestimmt ist, können wir abkürzend symboli schreiben

$$D = \left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x_1^{p_{11}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-1}} f}{\partial x_1^{p_{m-1,1}} \ldots \partial x_n^{p_{m-1,n}}} \right|.$$

Außer den m-reihigen auf $f_1, \ldots, f_m$ bezüglichen brauchen wir n die $(m-1)$-reihigen auf $f_1, \ldots, f_{m-1}$ bezüglichen Wronskischen De minanten. Diese haben die Form

$$\delta = \left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x_i^{p_{11}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x_1^{p_{m-2,1}} \ldots \partial x_n^{p_{m-2,n}}} \right|,$$

wobei jetzt $1 \leqq \nu_i \leqq m-2$ ist.

Wir werden nun vor allem folgenden Satz beweisen:

Besitzen die Funktionen $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ in irge einem zusammenhängenden Gebiete S des n-dimensionalen x-Raumes

[3]) Vgl. Ostrowski, Über ein Analogon der Wronskischen Determinante Funktionen mehrerer Veränderlicher. Diese Zeitschrift 4 (1919), S. 223–230. Ostrowski hat Kriterien angegeben, welche von den in dieser Arbeit entwick in der Form etwas verschieden sind.

reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ partielle Ableitungen bis zur $(m-1)$-ten Ordnung einschließlich, verschwinden ferner alle m-reihigen Wronskischen Determinanten D in S identisch, während von den auf $f_1, \ldots, f_{m-1}$ bezüglichen $(m-1)$-reihigen δ wenigstens eine in ganz S von 0 verschieden ist, so sind die f_i linear abhängig, und zwar ist

$$f_m \equiv c_1 f_1 + \ldots + c_{m-1} f_{m-1}.$$

Den Beweis führen wir auf zwei Arten. Das eine Mal benutzen wir bloß elementare Sätze über lineare algebraische Gleichungen, das andere Mal die Theorie der Systeme simultaner linearer partieller Differentialgleichungen mit einer endlichen Zahl linear unabhängiger Lösungen (§§ 1 und 2).

Ferner werden wir zeigen: *Sind $f_1, \ldots, f_m$ analytische Funktionen der komplexen Variablen $x_1, \ldots, x_n$, welche sich sämtlich in einem zusammenhängenden Gebiete S des $2n$-dimensionalen x-Raumes regulär verhalten, so ist daselbst das identische Verschwinden aller m-reihigen Wronskischen Determinanten D nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend für die lineare Abhängigkeit* (§ 3).

Schließlich untersuchen wir noch die lineare Abhängigkeit bei solchen Funktionen mehrerer Veränderlicher, welche Lösungen derselben linearen homogenen partiellen Differentialgleichung sind. Natürlich brauchen Lösungen einer solchen Differentialgleichung nicht linear abhängig zu sein. *Die Eigenschaft, Lösungen derselben Differentialgleichung zu sein, hat aber wenigstens einen gewissen Einfluß auf die lineare Abhängigkeit* der Funktionen, insofern sie dann nur noch weniger Bedingungen als sonst zu erfüllen brauchen. Diese Untersuchung kann man entweder als Anwendung der obigen allgemeinen Sätze oder auch direkt führen (§ 4).

§ 1.

Funktionen reeller Variabler. Erste Methode.

Wir behandeln zuerst der Einfachheit halber m Funktionen

$$f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y)$$

zweier reeller Variabler und nehmen an, daß alle m-reihigen Wronskischen Determinanten in einem gewissen Gebiet S der $(x\,y)$-Ebene identisch verschwinden, während für eine ganz bestimmte $(m-1)$-reihige Determinante δ in ganz S die Ungleichung besteht

$$\delta = \left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}}, \frac{\partial^{\nu_2} f}{\partial x^{p_2}\,\partial y^{q_2}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} \right| \neq 0.$$

Darin sind $\nu_1, \ldots, \nu_{m-2}$ feste Zahlen zwischen 1 und $m-2$.

Nun bilden wir folgendes Gleichungssystem[3])

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_{m-1} f_{m-1} = f_m \\ \varphi_1 \dfrac{\partial^{\nu_1} f_1}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} + \cdots + \varphi_{m-1} \dfrac{\partial^{\nu_1} f_{m-1}}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} = \dfrac{\partial^{\nu_1} f_m}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} \\ \vdots \\ \varphi_1 \dfrac{\partial^{\nu_{m-2}} f_1}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} + \cdots + \varphi_{m-1} \dfrac{\partial^{\nu_{m-2}} f_{m-1}}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} = \dfrac{\partial^{\nu_{m-2}} f_m}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} \end{cases}$$

Das sind $m-1$ Gleichungen für $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$. Da in ganz S Koeffizientendeterminante $\delta \neq 0$ ist, so hat (1) eine einzige Lösung. Die sind also in S eindeutig und stetig. Sie sind sogar einmal differenzierb denn die f_i sind $m-1$-mal differenzierbar, und die ν_i sind höchst gleich $m-2$. Ist nun ν irgendeine ganze Zahl zwischen 1 und $m-$ so gilt stets die Identität

$$(2)\qquad \varphi_1 \frac{\partial^{\nu} f_1}{\partial x^{p}\,\partial y^{q}} + \cdots + \varphi_{m-1} \frac{\partial^{\nu} f_{m-1}}{\partial x^{p}\,\partial y^{q}} = \frac{\partial^{\nu} f_m}{\partial x^{p}\,\partial y^{q}},$$

wobei p und q irgend zwei nicht negative ganze Zahlen mit der Summ bedeuten können. Zum Beweise benutzen wir folgendes System:

$$(3)\quad a_0 f_i + a_1 \frac{\partial^{\nu_1} f_i}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} + \cdots + a_{m-2} \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_i}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} + a_{m-1} \frac{\partial^{\nu} f_i}{\partial x^{p}\,\partial y^{q}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dieses System hat, da die Koeffizientendeterminante

$$\left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}}, \frac{\partial^{\nu} f}{\partial x^{p}\,\partial y^{q}} \right|$$

als m-reihige Wronskische Determinante in S identisch verschwin an jeder Stelle von S eine von der trivialen verschiedene Lös $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Ferner kann an keiner Stelle von S die Größe a_{m-1} sein; denn sonst wäre hier

$$a_0 f_i + a_1 \frac{\partial^{\nu_1} f_i}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} + \cdots + a_{m-2} \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_i}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} = 0$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$. Wir brauchen nur die ersten $m-1$ Gleichun In dem letzten System könnten nicht alle Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}$ schwinden, da bereits $a_{m-1} = 0$ sein sollte. Demnach müßte an der treffenden Stelle die Koeffizientendeterminante

$$\delta = \left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} \right| = 0$$

[3]) Vgl. Kowalewski, a. a. O. S. 328.

ein gegen die Voraussetzung. Da also tatsächlich überall $a_{m-1} \neq 0$ ist, önnen wir in (3) die Division durch a_{m-1} ausführen und erhalten etwa

$$3^+) \quad A_0 f_i + A_1 \frac{\partial^{\nu_1} f_i}{\partial x^{p_1} \partial y^{q_1}} + \ldots + A_{m-2} \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_i}{\partial x^{p_{m-2}} \partial y^{q_{m-2}}} = \frac{\partial^{\nu} f_i}{\partial x^{p} \partial y^{q}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Multiplizieren wir also die Gleichungen von (1) der Reihe nach mit $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$ und addieren, so bekommen wir unmittelbar (2).

Wir differenzieren nun die einzelnen Gleichungen von (1) nach x und rhalten unter wiederholter Anwendung von Identitäten der Form (2) das lgende System

$$4) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f_1 + \ldots && + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x} f_{m-1} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^{\nu_1} f_1}{\partial x^{p_1} \partial y^{q_1}} + \ldots && + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x} \frac{\partial^{\nu_1} f_{m-1}}{\partial x^{p_1} \partial y^{q_1}} = 0 \\ &\qquad \vdots \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_1}{\partial x^{p_{m-2}} \partial y^{q_{m-2}}} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x} && \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_{m-1}}{\partial x^{p_{m-2}} \partial y^{q_{m-2}}} = 0. \end{aligned}$$

Da an jeder Stelle von S die Koeffizientendeterminante der $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, d. h. $\neq 0$ ist, so muß überall

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x} = 0$$

ein. Mithin sind die φ_i von x unabhängig. Ebenso zeigt man, daß sie von y unabhängig sind. Sie sind also Konstante. Demnach liefert die erste Gleichung von (1) die lineare Abhängigkeit in der gesuchten Form.

Bei m Funktionen von n Variablen ist der Beweis fast wörtlich derselbe. Es sei etwa in ganz S

$$\delta = \left| f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x_1^{p_{11}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x_1^{p_{m-2,1}} \ldots \partial x_n^{p_{m-2,n}}} \right| \neq 0.$$

Man bildet das Gleichungssystem

$$5) \quad \begin{aligned} &\varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_{m-1} f_{m-1} && = f_m, \\ &\varphi_1 \frac{\partial^{\nu_1} f_1}{\partial x_1^{p_{11}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}} + \ldots && = \frac{\partial^{\nu_1} f_m}{\partial x_1^{p_{11}} \ldots \partial x_n^{p_{1n}}}, \\ &\qquad \vdots \\ &\varphi_1 \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_1}{\partial x_1^{p_{m-2,1}} \ldots \partial x_n^{p_{m-2,n}}} + \ldots && = \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_m}{\partial x_1^{p_{m-2,1}} \ldots \partial x_n^{p_{m-2,n}}}. \end{aligned}$$

Dann ist auch für jedes $\nu \leqq m-1$

$$6) \quad \varphi_1 \frac{\partial^{\nu} f_1}{\partial x^{p_1} \ldots} + \ldots = \frac{\partial^{\nu} f_m}{\ldots}.$$

Daraus findet man leicht in ganz S

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1;\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Die φ_i sind also Konstante.

§ 2.

Zweite Methode.

Wir nehmen zuerst wieder m Funktionen von zwei Variablen unt denselben Voraussetzungen wie im vorigen Paragraphen vor. Offenb bestehen die Identitäten

$$(7)\quad \begin{vmatrix} f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\partial y^{q_{m-2}}}, & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\partial y^{q_{m-2}}}, & \frac{\partial^{\nu_1+1} f}{\partial x^{p_1+1}\partial y^{q_1}} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} f, \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\partial y^{q_{m-2}}}, & \frac{\partial^{\nu_{m-2}+1} f}{\partial x^{p_{m-2}+1}\partial y^{q_{m-2}}} \end{vmatrix} = 0,$$

und ebenso

$$(8)\quad \begin{vmatrix} f, \ldots, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f, \ldots, & \frac{\partial^{\nu_1+1} f}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} f, \ldots, & \frac{\partial^{\nu_{m-2}+1} f}{\partial x^{p_{m-2}}\partial y^{q_{m-2}+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Die in (7) und (8) auftretenden Determinanten verschwinden entwed als m-reihige Wronskische oder deswegen, weil sie zwei identische Spalt haben, wenn z. B. $\frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ identisch sein sollte. Das Bildung gesetz dieser Determinanten ist evident; die ersten $m-1$ Spalten si allen gemeinsam, und die letzte Spalte entsteht, indem man jeweils Elemente der ersten, zweiten, ..., $(m-1)$-ten Spalte nach x resp. differenziert. Wie leicht ersichtlich, können nicht alle $2(m-1)$ Det minanten je zwei identische Spalten haben.

Schreibt man in allen diesen Determinanten f statt f_m in den E menten der letzten Zeile, also z. B. statt (7_1)

$$\begin{vmatrix} f_1, & \frac{\partial^{\nu_1} f_1}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}}, \ldots, & \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f_1}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}}, & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ f_2, \ldots, & & & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots & & & \\ f_{m-1}, \ldots, & & & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x} \\ f, \ldots, & & & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix} = 0,$$

so erhält man lineare homogene partielle Differentialgleichungen für eine unbekannte Funktion f.

Entwickelt man nach den Elementen der letzten Zeile und bedenkt, daß ständig $\delta \neq 0$ ist, so kann man etwa schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a_{00} f + a_{01} \frac{\partial^{\nu_1} f}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1}} + \ldots + a_{0,m-2} \frac{\partial^{\nu_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}}} = 0,$$

(9_1)

$$\frac{\partial^{\nu_1+1} f}{\partial x^{p_1+1}\,\partial y^{q_1}} + a_{10} f + \ldots = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{\nu_{m-2}+1} f}{\partial x^{p_{m-2}+1}\,\partial y^{q_{m-2}}} + a_{m-2,0} f + \ldots = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} + b_{00} f + \ldots = 0$$

(9_2)

$$\frac{\partial^{\nu_1+1} f}{\partial x^{p_1}\,\partial y^{q_1+1}} + b_{10} f + \ldots = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{\nu_{m-2}+1} f}{\partial x^{p_{m-2}}\,\partial y^{q_{m-2}+1}} + b_{m-2,0} f + \ldots = 0.$$

Einige der Gleichungen können Identitäten sein; wie schon erwähnt, ist das aber nicht bei allen möglich. Man hat also in (9) ein System simultaner Differentialgleichungen für ein und dieselbe Funktion f vor sich. Ein solches System besitzt, da eine Funktion mehreren Gleichungen genügen soll, im allgemeinen keine Lösung. Es besizt nur dann Lösungen, wenn die Koeffizienten a_{ik} und b_{ik} Bedingungen genügen, die ihrerseits wieder partielle Differentialgleichungen sind. Unser System hat aber sicher die Lösungen $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$; denn setzt man z. B. in der oben ausführlich geschriebenen Determinantengleichung, welche mit der ersten Gleichung von (9_1) übereinstimmt, $f = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, so erhält man links eine Determinante mit zwei identischen Zeilen. Diese Lösungen $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ sind wegen $\delta \neq 0$ linear unabhängig. Unser System hat

ferner die Lösung f_m; denn setzt man $f = f_m$, so erhält man ja die Identitäten (7) und (8). Es läßt sich nun zeigen, daß ein System vom Typus (9) nie mehr als $m-1$ linear unabhängige Lösungen haben kann, woraus unmittelbar folgt, daß f_m von $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ linear abhängig ist. Der Satz von der Höchstzahl der linear unabhängigen Lösungen, dessen Beweis wir hier der Kürze halber nur andeuten wollen, beruht darauf, daß, wenn man die Werte von f, $\frac{\partial^{r_1} f}{\partial x^{p_1} \partial y^{q_1}}, \ldots, \frac{\partial^{r_{m-2}} f}{\partial x^{p_{m-2}} \partial y^{q_{m-2}}}$ an einer Stellle von S vorschreibt, eine Lösung hierdurch *eindeutig* festgelegt ist, vorausgesetzt, daß überhaupt eine solche existiert. Dies gilt sowohl, wenn die Koeffizienten a_{ik} und b_{ik} stetige Funktionen reeller Variabler, als auch, wie wir gleich mit Rücksicht auf den folgenden Paragraphen bemerken, wenn sie analytisch-reguläre Funktionen komplexer Variabler sind. Was den letzteren Fall betrifft, so erkennt man ja aus der Struktur des Systems (9) leicht, daß durch Festlegung von f nebst der obengenannten $m-2$ Ableitungen auch alle andern Ableitungen beliebiger Ordnung an der betreffenden Stelle bestimmt sind. Der Eindeutigkeitsbeweis wird also wie bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung geführt. Auch im ersten Falle ist dies ohne jede prinzipielle Schwierigkeit möglich[4]).

Funktionen von mehr als zwei Variablen können ebenfalls mit unserer zweiten Methode behandelt werden, worauf wir aber nicht mehr eingehen, weil dazu gar nichts Neues erforderlich ist.

§ 3.

Analytische Funktionen komplexer Variabler.

Der in den beiden vorigen Paragraphen auf zwei Arten bewiesene Satz bleibt gültig, wenn $f_1, \ldots, f_m$ analytische Funktionen komplexer Variabler $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten, die sich sämtlich in einem gewissen Gebiete S regulär verhalten. Bei solchen Funktionen kann aber die Bedingung des Nichtverschwindens einer $(m-1)$-reihigen Wronskischen Determinante fallen gelassen werden, wie wir jetzt zeigen wollen. Wir machen also bloß die Voraussetzung, daß alle m-reihigen Wronskischen Determinanten in S identisch verschwinden. Dann besteht wenigstens in einem Teilgebiet von S lineare Abhängigkeit. Dies ist für $m = 1$ trivial, weil in diesem Falle die 1-reihige Wronskische Determinante mit der Funktion f_1 selbst identisch ist, und wird für beliebiges m durch vollständige Induktion bewiesen. Wir nehmen demnach an, daß die Behauptung für $m-1$ richtig ist. Entweder sind nun alle $(m-1)$-reihigen auf $f_1, \ldots, f_{m-1}$ bezüglicher

[4]) Vgl. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig (Göschen), 1905 S. 294–295.

Vronskischen Determinanten in S identisch Null; dann sind schon $_1, \ldots, f_{m-1}$ in einem Teilgebiet linear abhängig, also auch $f_1, \ldots f_{m-1}, f_m$. Oder das ist nicht der Fall; d. h. wenigstens eine $(m-1)$-reihige Determinante verschwindet nicht in S identisch. Sie sei also in einem bestimmten Punkte von 0 verschieden. Da sie einmal differenzierbar, mithin stetig ist, läßt sich eine Umgebung dieses Punktes, also ein Teilgebiet S_1 von S angeben, in welchem sie überall von 0 verschieden ist. Dann ist sicher in S_1 die Funktion f_m von $f_1, \ldots, f_{m-1}$ linear abhängig. In beiden Fällen besteht zunächst in einem Teilgebiet von S eine Identität der Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m = 0 .$$

Wegen des für analytische Funktionen gültigen Prinzips von der Permanenz einer Funktionalgleichung bleibt diese Identität aber in dem ganzen gemeinsamen Regularitätsgebiet S bestehen.

§ 4.

Lineare Abhängigkeit von Lösungen partieller Differentialgleichungen.

In diesem Paragraphen werden der Einfachheit halber alle auftretenden Funktionen als analytisch vorausgesetzt. Seien $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + B(x, y)z, \tag{10}$$

wo $A(x, y)$ und $B(x, y)$ in einem gewissen Bereiche S regulär sind. Dann ist das in S identische Verschwinden der einen Wronskischen Determinante

$$\mathfrak{D} = \left| z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}} \right|$$

für die lineare Abhängigkeit nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend. Dies kann man auch so ausdrücken: Sind die z_i als Funktionen von y linear abhängig, besteht also eine Identität der Form

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(x) z_i(x, y) = 0, \tag{11}$$

deren Koeffizienten $F_i(x)$ von y unabhängig sind, aber noch von x abhängen dürfen, so besteht auch eine Identität mit Konstanten c_i

$$\sum_{i=1}^{m} c_i z_i(x, y) = 0,$$

d. h. die z_i sind im gewöhnlichen Sinne linear abhängig.

Der Beweis kann auf zwei Arten geführt werden. Zuerst wenden wir den allgemeinen im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz an. Es

ergibt sich nämlich unter Berücksichtigung und eventueller Differentiation von (10) durch wiederholte Anwendung des Satzes, daß sich der Wert einer Determinante nicht ändert, wenn man zu den Elementen einer Spalte die mit demselben Faktor multiplizierten Elemente einer andern Spalte addiert, das Verschwinden aller m-reihigen Wronskischen Determinanten. Z. B. ist

$$\left|z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right| = \left|z, \frac{\partial z}{\partial y}, A\frac{\partial z}{\partial y} + Bz, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right| =$$

$$\left|z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right| = \left|z, A\frac{\partial z}{\partial y} + Bz, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right|$$

$$= A \cdot D = 0,$$

$$\left|z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right|$$

$$= \left|z, \frac{\partial z}{\partial y}, A\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial y} + B\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} z, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right|$$

$$= A \cdot D = 0,$$

$$\left|z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}}\right| = A^2 D = 0,$$

usw.

Jetzt wollen wir den Beweis für die lineare Abhängigkeit der z_i direkt führen. Aus (11) folgt[5])

$$\sum' F_i \frac{\partial z_i}{\partial y} = 0$$

und

$$\sum' \frac{dF_i}{dx} z_i + \sum' F_i \frac{\partial z_i}{\partial x} = 0$$

oder wegen (10)

$$\sum' \frac{dF_i}{dx} z_i + A\sum' F_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + B\sum' F_i z_i = \sum' \frac{dF_i}{dx} z_i = 0.$$

Es ist also

$$\sum' \frac{dF_i}{dx} z_i = 0,$$

ebenso

$$\sum' \frac{d^2 F_i}{dx^2} z_i = 0, \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\sum' \frac{d^{m-1} F_i}{dx^{m-1}} z_i = 0.$$

[5]) Wir können annehmen, daß keine der Funktionen $F_i(x)$ identisch verschwindet; denn wären nur $n < m$ unter ihnen, etwa $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ von 0 verschieden, so würde das folgende Verfahren schon die lineare Abhängigkeit von $z_1, \ldots, z_n$ liefern.

Aus (11) und (12) ergibt sich in symbolischer Schreibweise die dentität

$$\left| F, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}F}{dx^{m-1}} \right| = 0;$$

aher sind die $F_i(x)$ linear abhängig. Sei etwa ohne Beschränkung der llgemeinheit mit Konstanten a_i

$$F_m(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots + a_{m-1} F_{m-1}(x).$$

Durch Einsetzen in (11) findet man

$$\sum_{i=1}^{m-1} F_i(z_i + a_i z_m) = 0$$

der für

$$z_i + a_i z_m = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

13) $$\sum_{i=1}^{m-1} F_i u_i = 0.$$

Verschwindet eine der Funktionen u_i identisch, so ist die lineare Abhängigkeit ler z_i bewiesen; andernfalls hat man doch in (13) eine (11) völlig analoge dentität vor sich, die aber nur noch $m-1$ Lösungen von (10), nämlich lie u_i enthält. So fährt man fort und gelangt schließlich, wenn sich die ineare Abhängigkeit nicht schon vorher herausgestellt hat, zu

14) $$F_1 w_1 = 0.$$

vo w_1 eine lineare mit konstanten Koeffizienten gebildete Kombination ler z_i ist. Wegen $F_1 \neq 0$ ergibt sich dann, w. z. b. w.,

$$w_1 = 0.$$

Genügen m Funktionen z_i von n Variablen der Gleichung

15) $$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + A_{n+1} z = 0,$$

n der etwa A_1 nicht identisch verschwindet, so ist für die lineare Abhängigkeit schon hinreichend das Verschwinden aller m-reihigen Wronskischen Determinanten, in welchen keine Ableitungen nach x_1 auftreten, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Bestehen einer Identität der Form

16) $$\sum_{i=1}^{m} F_i(x_1) z_i = 0.$$

(Eingegangen am 11. Februar 1921.)

Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen.

Von

S. Bochner in Berlin.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, das allgemeine Orthogonalisierungsverfahren speziell auf analytische Funktionen komplexen Arguments anzuwenden. Die bei der Aufstellung von Orthogonalsystemen auftauchende Frage, ob und inwieweit sich willkürliche Funktionen nach einem derartigen System entwickeln lassen, läßt in diesem Falle recht einfache Teillösungen zu. Die Arbeit entstand aus einem Versuch, die von Ritz[1]) und von Herrn Bieberbach[2]) angestrebte Approximation der Funktion, welche einen einfach zusammenhängenden Bereich auf einen Kreis abbildet, durch einfach zu bildende Funktionen von gewissen Minimaleigenschaften weiter auszubauen. Wie sehr diese Frage mit der unsrigen zusammenhängt, wird die folgende Darstellung ergeben. Auch das Problem, analytische Funktionen nach Systemen gegebener zu entwickeln, wurde bereits von den Herren Faber[3]) und Fejér[4]) behandelt.

In jüngster Zeit erschien eine Abhandlung von Herrn Szegö[5]), in welcher für schlichte, von einer analytischen Kurve berandete Bereiche ähnliche Resultate erhalten werden. Da aber Herr Szegö von Polynomen

[1]) Walter Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, Crelle's Journal **135** (1909), S. 1—61.

[2]) Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rend. d. Circolo mat. di Palermo, **38** (1914), S. 98—118.

[3]) Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen **57** (1903), S. 389—408 und **64** (1907), S. 116—135.

[4]) Interpolation und konforme Abbildung, Nachrichten der kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1918, S. 319—331.

[5]) „Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören", diese Zeitschrift **9** (1921), S. 218—270.

ausgeht, die in bezug auf die Randkurve orthogonal sind, sind seine Ansätze auf allgemeinere, besonders nichtschlichte Bereiche nicht unmittelbar übertragbar.

Die bei uns auftretenden Integrationen und Orthogonalisierungen sind immer in bezug auf die Fläche des Bereiches gemeint, nie etwa auf die Berandung. Eine endliche oder unendliche Folge in einem Bereich $\mathfrak{B}$ analytischer Funktionen

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \dots$$

bezeichnen wir als Orthogonalsystem, wenn die Relationen

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq h \end{cases}$$

bestehen (Pkt. 8).

Hierbei lassen wir den allgemeinsten auf einer Riemannschen Fläche gelegenen Bereich zu, also eine schlichte oder nichtschlichte nur aus inneren Punkten bestehende zusammenhängende Punktmenge mit Windungspunkten endlicher Ordnung. Die Art des Zusammenhanges und die Beschaffenheit der Grenzpunkte kommen nicht in Frage. Die Funktionen $\varphi(z)$ schränken wir in ihrem Verhalten am Rande nicht ein, sie dürfen sogar innerhalb $\mathfrak{B}$ algebraische Singularitäten aufweisen. Bei einer solchen Allgemeinheit eines Bereiches $\mathfrak{B}$ und einer Funktion $f(z)$ ist aber das Integral $\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega$ kein eigentliches Integral mehr im Lebesgueschen Sinne. Wir können ihm aber einen eindeutigen Wert beilegen, der endlich oder unendlich ausfallen kann, und der, im Falle, daß die Voraussetzungen für die Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne vorhanden sind, mit dem entsprechenden Integral übereinstimmt. Hat nun bei vorgegebenem Bereich $\mathfrak{B}$ das Integral $\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega$ einen endlichen Wert, dann nennen wir $f(z)$ eine Funktion vom endlichen Typus und den Wert dieses Ausdrucks wollen wir kurz als das Integral von $f(z)$ über $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Wenn $f(z)$ und $g(z)$ beides Funktionen vom endlichen Typus sind, dann kann der Begriff der Integrierbarkeit auf den Integranden $f(z)\overline{g(z)}$ ausgedehnt werden, und das entsprechende Integral hat immer einen endlichen Wert, gemäß der Schwarzschen Ungleichheit

$$(2) \qquad \left|\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{g(z)}\,d\omega\right|^2 \leqq \int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega \int_{\mathfrak{B}} g(z)\overline{g(z)}\,d\omega \qquad (\S\,1).$$

Jetzt erst haben die Orthogonalisierungsbedingungen (1) einen unzweideutigen Sinn. Da für unsere Zwecke nur solche Bereiche Interesse haben, auf denen Orthogonalsysteme existieren, müssen wir von unserem Bereiche verlangen, daß er mindestens eine Funktion vom endlichen Typus aufweist. In diesem Falle kann man durch Normierung dieser Funktion ein Orthogonal-

system erzeugen, das sich auf eine einzige Funktion reduziert. Daß es aber wirklich Bereiche gibt, die für uns ausschalten, überzeugt man sich wenn man etwa die schlichte z-Ebene betrachtet. Das Linienintegral $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ einer Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus würde dann die konforme Abbildung der ganzen Ebene auf einen Bereich von endlichem Inhalt liefern, was offenbar unmöglich ist.

Den $(n+1)$ ersten Funktionen

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z)$$

aus einer orthogonalen Folge $\varphi_\nu(z)$ ordnen wir die Funktion zweier Variablen zu:

$$(3)\qquad K_{\varphi_n}(\zeta,z)=\overline{\varphi_0(\zeta)}\,\varphi_0(z)+\overline{\varphi_1(\zeta)}\,\varphi_1(z)+\ldots+\overline{\varphi_n(\zeta)}\,\varphi_n(z).$$

Die nicht negative Funktion $K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)$ besitzt nun die Eigenschaft für jedes System $\varphi_\nu(z)$ und jede Zahl n unterhalb einer festen Funktion $F(\zeta)$ zu liegen, welche überall in $\mathfrak{B}$ bis auf die Windungspunkte einen endlichen Wert hat. Letztere ist sogar in jedem abgeschlossenen, windungspunktfreien Teilbereich von $\mathfrak{B}$ beschränkt (§ 2).

Hierauf folgt sofort die Existenz der Funktionen

$$K_\varphi(\zeta,\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(\zeta)|^2$$

und weiterhin von

$$K_\varphi(\zeta,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\,\varphi_\nu(z).^{6})$$

Hieraus kann man schließen, daß eine lineare Verbindung

$$(4)\qquad f(z)=c_0\varphi_0(z)+c_1\varphi_1(z)+c_2\varphi_2(z)+\ldots$$

in $\mathfrak{B}$ konvergent ist und eine analytische Funktion, sogar vom endlichen Typus liefert, sofern nur die Quadratsumme $\sum_{\nu=0}^{\infty}|c_\nu|^2$ konvergiert. Für die Koeffizienten ergeben sich dann die Relationen

$$(5)\qquad c_\nu=\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\omega \text{ und } \sum|c_\nu|^2=\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega,$$

---

[6]) Die vorliegende Arbeit steht in engstem Zusammenhang mit der vor kurzem erschienenen Arbeit des Herrn S. Bergmann, Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes, Math. Ann. 86 (1922), S. 238–279. Ich habe die Bergmannsche Untersuchung in ihren Anfängen kennen gelernt und bin erst durch sie zu den hier entwickelten Verallgemeinerungen angeregt worden.

aus welchen hervorgeht, daß eine derartige Funktion $f(z)$ keine weitere Entwicklung nach den $\varphi_\nu(z)$ mit Koeffizienten endlicher Quadratsumme zulassen kann. Anders ausgedrückt: die Null läßt sich nicht durch Orthogonalfunktionen mit Koeffizienten endlicher Quadratsumme darstellen. Wenn insbesondere ein System $\varphi_\nu(z)$ im Hilbertschen Sinne abgeschlossen ist, d. h. keine weitere Orthogonalfunktion zuläßt, dann kann man jede Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus nach diesem System auf Fouriersche Art entwickeln (§ 3, Pkt. 11).

Es existiert zu jedem Bereiche mindestens ein abgeschlossenes Orthogonalsystem. Unter den Funktionen vom endlichen Typus gibt es also eine Folge solcher, aus denen jede andere durch eine lineare Verbindung hervorgeht. Es ist nicht entschieden, ob es nicht Bereiche gibt, für welche es nur endlich viele oder nur eine einzige lineare unabhängige unter diesen Funktionen gibt; d. h. die Anzahl der Funktionen eines abgeschlossenen Systems wäre dann endlich (§ 4, Pkt. 14—15). Für einen einfach zusammenhängenden Bereich gibt es immer unendlich viele unter unseren Funktionen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, unter allen Funktionen, die sich nach einem System $\varphi_\nu(z)$ ableiten lassen und die im Punkte ζ den Wert eins annehmen, diejenige ausfindig zu machen, welche das kleinste Integral über $\mathfrak{B}$ besitzt, dann erhält man als Lösung der Funktion

$$w_\varphi(\zeta, z) = \frac{K_\varphi(\zeta, z)}{K_\varphi(\zeta, \zeta)}$$

Ihr Integral über $\mathfrak{B}$ beträgt $\frac{1}{K_\varphi(\zeta, \zeta)}$. Selbstverständlich hat das Problem nur dann einen Sinn, wenn $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ von Null verschieden ist. Sonst gibt es nämlich gar keine lineare Verbindung der $\varphi_\nu(z)$, die in ζ von Null verschieden wäre, also insbesondere den Wert eins annähme. Solche Ausnahmspunkte dürfen sich aber, wie man leicht einsieht, nirgends im Innern von $\mathfrak{B}$ häufen. ζ darf aber auch unter Umständen kein Windungspunkt sein, weil in solchen $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ unendlich werden kann. Die Minimalfunktionen $w_\varphi(\zeta, z)$ und $\lambda_\varphi(\zeta) = 1 : K_\varphi(\zeta, \zeta)$ werden approximiert durch die Funktion $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ und $\lambda_{\varphi_n}(\zeta) = 1 : K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$, welche die erwünschten Minimaleigenschaften in bezug auf das reduzierte System: $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ besitzen. Nimmt man ein abgeschlossenes System, dann liefern die Funktionen $w_\varphi(\zeta, z)$ und $\lambda_\varphi(\zeta)$ die Lösung unseres Minimumproblems, wenn man alle möglichen Funktionen vom endlichen Typus, die in ζ den Wert eins annehmen, zuläßt. Folglich sind die Minimalfunktionen eindeutig, also unabhängig von der Wahl des Systems. Alle abgeschlossenen Systeme haben demnach einen gemeinsamen Kern, den wir mit $K(\zeta, z)$ bezeichnen (Pkt. 10, 12, 16).

Im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereiches liefert $w(\zeta, z$ die Ableitung derjenigen Funktion, welcher unter allen im Punkte winkeltreuen, im weiteren Sinne konformen Abbildungen (ζ darf nich Windungspunkt sein!) diejenige mit kleinstem Flächeninhalt entspricht Aus der Möglichkeit der Kreisuniformisierung eines einfach zusammen hängenden Bereiches folgt aber, wie Bieberbach bemerkt hat (l. c.), da die Minimalabbildung mit eben der Kreisabbildung identisch ist, indes is es mir nicht gelungen, aus der Minimalabbildung der Kreisuniformisierun aufs neue herzuleiten.

In § 5 werden einige Beziehungen von Orthogonalsystemen zueinande besprochen.

Zum Schluß werden im § 6 alle voraufgehenden Betrachtungen noc einmal durchgegangen, aber nur in bezug auf solche Funktionen vo endlichen Typus, welche keine algebraischen Singularitäten in $\mathfrak{B}$ aufweise also durchweg innerhalb $\mathfrak{B}$ endlich sind. Die Ergebnisse sind ganz analo auch das Minimumproblem läßt eine ähnliche Lösung zu.

Hervorzuheben ist, daß die Kernfunktion $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ auch in de Windungspunkten endlich und sogar für alle Systeme beschränkt bleib Zur Frage der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Bereich ist noch zu bemerken, daß die durch die jetzigen Funktionen vermittelte Abbildungen im engeren Sinne konform sind, also einen Windungspunk in einen Windungspunkt von nicht niederer Ordnung überführen. Un das so gestellte Problem der Abbildung auf einen Bereich von minimale Inhalt läßt eben eine eindeutige Lösung zu.

Es sei noch erwähnt, daß man andererseits die angeführten Resultat nach einer anderen Richtung hin sehr erweitern kann. Denkt man dara daß die analytischen (eigentlich harmonischen) Funktionen aus den Lösunge der Laplaceschen Differentialgleichnng $\Delta u = 0$ bestehen, dann kann ma die Entwicklungssätze dahin deuten, daß zu jedem vorgegebenen Bereic die Lösungen, der Laplaceschen Differentialgleichung ein „Fundamenta system" besitzen. Dieses Resultat kann auf die allgemeinsten linearer homogenen, partiellen Differentialgleichungen übertragen werden. Nähere darüber soll eine weitere Arbeit bringen.

§ 1.

Einführung eines uneigentlichen Integrals.

Es sei ein zusammenhängender, offener Bereich und eine daselb definierte stetige nicht negative Funktion des Ortes vorgegeben; dan wollen wir in eindeutiger Weise festlegen, was unter dem Flächenintegra dieser Funktion über den Bereich zu verstehen ist.

1.. Vorerst eine Hilfsbetrachtung. In der x, y-Ebene sei eine ganz im ndlichen gelegene offene Punktmenge $\mathfrak{B}$ gegeben. Eine gegen $\mathfrak{B}$ konver- erende Folge abgeschlossener Teilmengen von $\mathfrak{B}$:

$$\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \overline{\mathfrak{B}}_3, \ldots,$$

on denen jede ganze innerhalb aller folgenden gelegen ist — von denen so je zwei eine von Null verschiedene Ränderentfernung haben —, nennen ir eine Ausschöpfungsfolge von $\mathfrak{B}$. Ausschöpfungsfolgen lassen sich immer erstellen ($\overline{\mathfrak{B}}_k$ bestehe etwa aus allen Punkten von $\mathfrak{B}$, welche vom Rande ne Entfernung $\geqq e_k$ haben, und $e_1 > e_2 > e_3 \ldots \to 0$).

Läßt man einen Punkt P den Rand von $\overline{\mathfrak{B}}_k$ durchlaufen, dann hat ine Entfernung vom Rande von $\mathfrak{B}$: $E_i(P)$ ein Maximum und ein Minimum

6) $$\mathsf{P}_k \quad \text{und} \quad \varrho_k, \qquad \mathsf{P}_k \geqq \varrho_k.$$

s ergibt sich

7) $$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \ldots \to \varrho.$$

Vir behaupten nun:

8) $$\overline{\lim_{\nu \to \infty} \mathsf{P}_\nu} = 0,$$

ithin auch $\lim_{\nu \to \infty} \mathsf{P}_\nu = 0$, und um so mehr $\varrho = 0$.

Wir ziehen jetzt die Komplementärmengen aller unserer Punktmengen bezug auf ein genügend großes Quadrat hinzu:

9) $$C\overline{\mathfrak{B}}_1 > C\overline{\mathfrak{B}}_2 > C\overline{\mathfrak{B}}_3 \ldots \to C\mathfrak{B}.$$

ie $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ sind offen und je zwei unter ihnen haben eine positive Ränder- ntfernung. Nach Voraussetzung gibt es auf dem Rande von $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ einen unkt P_k, der vom Rande von $\mathfrak{B}$ eine Entfernung P_k hat. Hieraus kann an auf die Existenz eines Punktes Q_k schließen, der sowohl in $\mathfrak{B}$ als uch in $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ gelegen ist und vom Rande eine Entfernung $\geqq \frac{\mathsf{P}_k}{2}$ hat. Diese unkte häufen sich in mindestens einem Punkte. Wäre nun $\overline{\lim \mathsf{P}} > 0$, ann läge mindestens einer dieser Häufungspunkte innerhalb $\mathfrak{B}$ — wir ennen ihn Q — für den gälte

10) $$E(Q) \geqq \frac{\overline{\lim \mathsf{P}_\nu}}{2}.$$

Wir suchen jetzt aus der Folge Q_k eine gegen Q konvergierende Teil- olge Q_k' heraus,

11) $$Q_k' \to Q.$$

ie entsprechenden Größen

$$\overline{\mathfrak{B}}_k', \; C\overline{\mathfrak{B}}_k', \; \mathsf{P}_k', \; \varrho_k'$$

erfüllen auch sämtliche Gleichungen (6) bis (9). Die Punkte $Q_2', Q_3', Q_4' \ldots$ liegen sämtlich in $C\overline{\mathfrak{B}}_2'$, ihr Häufungspunkt Q ist demnach ein Punkt aus $C\overline{\mathfrak{B}}_1'$. Ähnlich schließt man, daß der Punkt Q in jeder Menge $C\overline{\mathfrak{B}}_k'$ gelegen ist. Q ist also Punkt von $C\mathfrak{B}$; kann also insbesondere nicht innerhalb $\mathfrak{B}$ liegen und Ungleichung (10) erfüllen. Die Annahme $\overline{\lim} P_\nu > 0$ führt also zu einem Widerspruch.

2. Es sei jetzt innerhalb $\mathfrak{B}$ eine stetige nicht negative Funktion $p(x, y) \geqq 0$ definiert. Die Integrale

$$\int_{\mathfrak{B}_n} p(x, y)\, d\omega$$

existieren, wachsen ihrem Zahlenwerte nach monoton mit n, streben also einem endlichen oder unendlichen Limeswert λ zu.

Nimmt man jetzt dieselben Integrale über eine andere Ausschöpfungsfolge $\overline{B}_n$, und bezeichnet man den entsprechenden Limes mit l, dann besteht die Gleichung

$$\lambda = l. \tag{12}$$

Man greife die Punktmenge $\overline{B}_k$ heraus. Die den Zahlen ϱ_n und P entsprechenden Größen wollen wir mit r_n und R_n bezeichnen. Aus $R_n \longrightarrow$ folgt, daß man bei festgehaltenem k eine Zahl n wählen kann, für welch

$$r_k \geqq P_n.$$

Hieraus folgt sofort

$$\overline{\mathfrak{B}}_n > \overline{B}_k, \qquad \int_{\mathfrak{B}_n} p(x, y)\, d\omega \geqq \int_{\overline{B}_k} p(x, y)\, d\omega,$$

also umsomehr:

$$\lambda \geqq \int_{\overline{B}_k} p(x, y)\, d\omega.$$

Weil aber diese Ungleichung für jedes k richtig ist, folgt

$$\lambda \geqq l.$$

Ebenso schließt man aber

$$\lambda \leqq l, \quad \text{also} \quad l = \lambda.$$

Wenn die so erhaltene, von der Wahl der Ausschöpfungsfolge unabhängige Zahl λ endlich ist, nennen wir $p(x, y)$ integrierbar, und diese Zahl ist dann der Wert des Integrals. Da es immer Ausschöpfungsfolgen gibt (Pkt. 1 läßt sich die Integrierbarkeit immer entscheiden. Ist $p(x, y)$ auch am Rande von $\mathfrak{B}$ stetig, dann haben wir es mit einem einfachen Lebesguesche Integral zu tun.

Für die Integrierbarkeit ist insbesondere notwendig und hinreichend daß das Integral von $p(x, y)$ über jede abgeschlossene Teilmenge von nach oben beschränkt ist. Hieraus können wir schließen, daß eine über integrierbare Funktion auch über jede Teilmenge von $\mathfrak{B}$ integrierbar ist

ıd daß eine über $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ integrierbare Funktion auch über $\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'$ ıtegrierbar ist, und das Integral sich aus der Summe der beiden Integrale ber $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ zusammensetzt.

3. In Punkt 1 und 2 war es wesentlich, daß die betrachteten Punktıengen ganz im Endlichen gelegen waren. Diese Einschränkung wollen ir jetzt fallen lassen. Die Ausschöpfungsfolgen definieren wir wie in unkt 1, wir verlangen nur noch, daß jede einzelne Ausschöpfungsmenge eschränkt bleibt. Die Integrale

$$\int_{\bar{\mathfrak{B}}_n} p(x,y)\,d\omega$$

aben wiederum einen endlichen oder unendlichen Limes.

Um die Unabhängigkeit dieser Zahl von der speziellen Wahl der usschöpfungsfolge darzutun, führen wir eine Folge konzentrischer Quadrate

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

ıit den Seitenlängen

$$1, 2, 3, \dots$$

ın. Die Punktmengen

$$D_{rs} = \bar{\mathfrak{B}}_r Q_s, \quad D_s = \mathfrak{B} Q_s \tag{12_1}$$

rfüllen die Voraussetzungen von Punkt 1 und 2, für sie läßt sich also die ntegrierbarkeit von $p(x,y)$ entscheiden. Wenn wir nachweisen, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{\bar{\mathfrak{B}}_n} p(x,y)\,d\omega = \lim_{s=\infty} \int_{D_s} p(x,y)\,d\omega, \tag{13}$$

ann sind wir fertig, weil doch die rechte Seite von (13) von der Ausschöpfungsfolge unabhängig ist. Alle in Punkt 2 entwickelten Sätze über en Kalkül mit unserem Integral gelten dann auch für die allgemeinsten ffenen Punktmengen.

Wir haben noch Gleichung (13) zu beweisen.

Bei festgehaltenem s konvergiert D_{rs} gegen D_s, und durch Verkleinerung eder der Punktmengen D_{rs} kann man eine Ausschöpfungsfolge von D_s erstellen. Weil aber jedenfalls $D_{rs} < D_s$, können wir schließen

$$\lim_{r\to\infty} \int_{D_{rs}} p(x,y)\,d\omega = \int_{D_s} p(x,y)\,d\omega. \tag{14}$$

Veil ja jedes D_{rs} in $\bar{\mathfrak{B}}_r$ gelegen, ist nach Hinzuziehung von (14)

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\bar{\mathfrak{B}}_r} p(x,y)\,d\omega \geqq \lim_{s\to\infty} \int_{D_s} p(x,y)\,d\omega. \tag{15}$$

Jede Menge $\mathfrak{B}_r$ ist aber wegen ihrer Beschränktheit in einem gevissen Q_n, also auch D_n enthalten. Hieraus

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\bar{\mathfrak{B}}_r} p(x,y)\,d\omega \leqq \lim_{s\to\infty} \int_{D_s} p(x,y)\,d\omega. \tag{16}$$

ıus (15) und (16) folgt dann Gleichung (13).

4. Wir wollen jetzt endlich in unserer Definition des uneigentlichen Integrals denjenigen Schritt vornehmen, auf den es uns wesentlich ankommt. Wir wollen nämlich den allgemeinsten Bereich, wie er in der Funktionentheorie vorkommt, betrachten. So ein Bereich liegt in einer abzählbaren Folge von Riemannschen Blättern und besitzt im Innern Windungspunkte endlicher, aber beliebig hoher Ordnung, die notwendigerweise in höchstens abzählbarer Anzahl auftreten können. Um das Integral von $p(x, y)$ über $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, zerlegen wir den Bereich in eine Folge von Punktmengen, von denen jede den Durchschnitt des Bereiches mit einem einzigen Riemannschen Blatt ausmacht. Diese Zerlegung ist eindeutig. Jede dieser Punktmengen kann durch eventuelle Fortlassung einer Nullmenge innerer Punkte des Bereiches — was an dem Werte des Integrals von $p(x, y)$ über $\mathfrak{B}$ nichts ändern kann — zu einer offenen Punktmenge gemacht werden, die unter Punkt 3 fällt. Die Summe der Integrale von $p(x, y)$ über jede einzelne Punktmenge bezeichnen wir als das Integral von $p(x, y)$ über $\mathfrak{B}$. Man kann nun nach verschiedenen Methoden (Poincaré, Koebe) jeden Bereich durch Bereiche ausschöpfen, von denen jeder ganz im Endlichen und in nur endlich vielen Blättern gelegen ist. Über jedem Bereich eine solchen Ausschöpfungsfolge existiert das Lebesguesche Integral und man kann ganz ähnlich wie in 3 nachweisen, daß der Limes der Integrale über eine Ausschöpfungsfolge mit dem eben festgesetzten Wert des Integrals übereinstimmt. Beim Beweise spielt die Vereinigungsmenge der n ersten Riemannschen Blätter dieselbe Rolle wie das Quadrat Q_n in 3.

5. Wir wollen noch eines bemerken. Wir haben bisher stets vorausgesetzt, daß die Funktion $p(x, y)$ durchweg in $\mathfrak{B}$ stetig ist. Die sämtlichen Betrachtungen übertragen sich aber sofort, wenn $p(x, y)$ in einem Punkte unendlich groß wird und das uneigentliche Integral der Funktion $p(x, y)$ über eine kleine Umgebung des Punktes im Cauchyschen Sinne existiert.

6. Es haben für uns im folgenden nur solche Funktionen $p(x, y)$ Interesse, welche das Quadrat des absoluten Betrages einer in $\mathfrak{B}$ analytischen Funktion

$$f(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y) \tag{17}$$

sind. Im allgemeinen werden wir für $f(z)$ sogar isolierte Singularitäten in $\mathfrak{B}$ zulassen, wenn nicht das Gegenteil hervorgehoben ist. Bei festgehaltenem Bereich $\mathfrak{B}$ nennen wir die Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus, wenn das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\, d\omega$$

einen endlichen Wert hat, und den Betrag dieses Integrals wollen wir kurz das Integral von $f(z)$ über $\mathfrak{B}$ nennen.

Wir wollen noch gleich feststellen, welche von den zugelassenen Singularitäten mit der Forderung nach der Integrierbarkeit von $f(z)\overline{f(z)}$ verträglich sind. P sei ein Punkt in $\mathfrak{B}$, etwa $k-1$-ter Ordnung. Wenn $f(z)$ vom endlichen Typus sein soll, muß das Integral von $|f(z)|^2$, genommen über eine genügend kleine kreisförmige Umgebung K des Punktes P existieren. Im Punkte P lasse $f(z)$ die Entwicklung

18) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^{\frac{n}{k}}$$

1. Für das Integral

19) $$\int f(z)\overline{f(z)}\,dx\,dy$$

kann, wenn man die Substitution

20) $$z-\zeta=z'^k, \qquad z'=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$$

macht, schreiben:

21) $$k^2\cdot\int_{r_1}^{r_0} dr\int_0^{2\pi} d\varphi\,\Big|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r^n\cos n\varphi+ir^n\sin n\varphi)\Big|^2 r^{2k-1},$$

wofern man sich das Integral in (19) in der ursprünglichen Windungsfläche über einen Kreisring mit den Radien $r_1^{\frac{1}{k}}$ und $r_0^{\frac{1}{k}}$ erstreckt denkt. Für (21) können wir schreiben:

22) $$k^2\pi\sum_{n\neq -k}|a_n|^2\frac{r_0^{2k+2n}}{2k+2n}-k^2\pi\sum_{n\neq -k}|a_n|^2\frac{r_1^{2k+2n}}{2k+2n}+k^2\pi|a_k|^2\log\frac{r_0}{r_1}.$$

Wir lassen r_1 gegen Null abnehmen. Wir erkennen, daß das Integral nur dann im Cauchyschen Sinne existiert, wenn die Koeffizienten a_ν, deren Indizes $\leqq -k$ sind, verschwinden. Es kommen demnach von den negativen Potenzen nur die $k-1$ ersten in Betracht. Die Funktion kann also höchstens in den Windungspunkten Singularitäten besitzen und zwar in einem Windungspunkt $k-1$-ter Ordnung einen Pol höchsens $k-1$-ter Ordnung. Solche Pole können aber auch wirklich auftreten.

Wir können dies Resultat auch anders ableiten. In einer kreisförmigen Umgebung K von P können wir jedenfalls eine Funktion

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

eindeutig festlegen. Die Funktion $F(z)$ liefert eine (im weiteren Sinne) konforme Abbildung der kreisförmigen Umgebung und das Integral

$$\int_K f(z)\overline{f(z)}\,d\omega$$

liefert den Flächeninhalt dieser Abbildung. Damit dieser Inhalt endlich wird, muß $F(z)$ auch in P selbst analytisch sein, und

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

darf nur von besagter Art unendlich werden. Wir lassen aber deswegen diese Singularitäten zu, um alle Fälle konformer Abbildungen miteinzubegreifen.

7. $f(z)$ und $g(z)$ mögen zwei Funktionen vom endlichen Typus sein. Dann existiert auch das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{g(z)}\,d\omega$$

in dem Sinne, daß der Wert dieses Integrals über eine Folge von Ausschöpfungsbereichen einem von der Ausschöpfung unabhängigen Limes zustrebt. Denn in Anlehnung an (17) können wir, falls $\mathfrak{B}'$ ein abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{B}$ ist, schreiben:

$$\int_{\mathfrak{B}'} f(z)\overline{g(z)}\,d\omega = \int_{\mathfrak{B}'} f_1(x,y)g_1(x,y)\,d\omega + \int_{\mathfrak{B}'} f_2 g_2\,d\omega + i\int_{\mathfrak{B}'} f_2 g_1\,d\omega - i\int_{\mathfrak{B}'} f_1 g_2\,d\omega$$

Jedes dieser Insegrale kann als Differenz zweier Integrale positiver Funktionen geschrieben werden:

$$\int_{\mathfrak{B}'} f_m g_n\,d\omega = \frac{1}{4}\int_{\mathfrak{B}'} (f_m + g_n)^2\,d\omega - \frac{1}{4}\int_{\mathfrak{B}'} (f_m - g_n)^2\,d\omega,$$

von denen jede gemäß der Schwarzschen Ungleichheit

$$\int_{\mathfrak{B}'} (f_m + g_n)^2\,d\omega \leqq 2\int_{\mathfrak{B}'} f_m^2\,d\omega + 2\int_{\mathfrak{B}'} g_n^2\,d\omega$$

integrierbar ist.

Es besteht die Schwarzsche Ungleichheit:

$$(23) \qquad \left|\int_{\mathfrak{B}'} f(z)\overline{g(z)}\,d\omega\right|^2 \leqq \int_{\mathfrak{B}'} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega \int_{\mathfrak{B}'} g(z)\overline{g(z)}\,d\omega.$$

Wir können jetzt den Satz beweisen:

Satz I. *Eine lineare Verbindung endlich vieler Funktionen vom endlichen Typus liefert eine Funktion desselben Typus.*

Es sei nämlich

$$(25) \qquad f(z) = c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \ldots + c_k f_k(z)$$

und $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B}$, dann ist

$$(25) \qquad \int_{\mathfrak{B}'} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega = \sum_{m,n=0}^{k} c_m \bar{c}_n \int_{\mathfrak{B}} f_m(z)\overline{f_n(z)}\,d\omega.$$

echts kann man für jeden Summanden zum Limes $\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}$ übergehen; ieraus folgt, daß $f(z)$ vom endlichen Typus ist und die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega = \sum_{m,n=0}^{k} c_m \bar{c}_n \int_{\mathfrak{B}} f_m(z)\overline{f_n(z)}\,d\omega \tag{26}$$

ichtig ist.

§ 2.

Der Hauptsatz über Orthogonalfunktionen.

8. Wir legen einen Bereich $\mathfrak{B}$ zugrunde, von dem wir nur verlangen, laß er mindestens eine Funktion $w(z)$ vom endlichen Typus aufweist. $\mathfrak{B}_n$ bedeute ein für allemal den n-ten Bereich einer Ausschöpfungsfolge.

Es sei jetzt eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen vom ndlichen Typus:

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots \tag{27}$$

egeben, und zwar möge genau

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z)\overline{\varphi_i(z)}\,d\omega = 1$$

ein. Nach Punkt 7 hat dann das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega \qquad (i \neq k)$$

einen Sinn, und zwar soll es genau den Wert Null haben, also

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega = \varepsilon_{ik}. \tag{28}$$

Dann wollen wir das System $\varphi_\nu(z)$ ein Orthogonalsystem nennen. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz mindestens eines Orthogonalsystems.

9. Wir greifen aus (27) die $n+1$ ersten Funktionen heraus und bilden aus ihnen die Funktion zweier Variablen:

$$K_{\varphi_n}(\zeta, z) = \overline{\varphi_0(\zeta)}\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\zeta)}\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\zeta)}\varphi_n(z) \tag{29}$$

Insbesondere wird uns die nicht negative Funktion

$$K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n} |\varphi_i(\zeta)|^2$$

interessieren.

Satz II. *Die Funktion $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ liegt bei jeder Wahl des Systems $\varphi_\nu(z)$ und jeder Zahl n unterhalb einer festen Funktion $F(\zeta)$,*

$$K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) \leqq F(\zeta), \tag{30}$$

welche in allen Punkten ζ, die keine Windungspunkte sind, einen endlichen Wert annimmt.

Die Funktion $F(\zeta)$ ist sogar in jeder Teilmenge von $\mathfrak{B}$, welche von allen Rand- und Windungspunkten eine von Null verschiedene Entfernung hat, beschränkt.

Sind an der Stelle ζ (kein Windungspunkt!) die Funktionen $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ sämtlich gleich Null, dann ist $K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)=0$, also sicherlich beschränkt. Sonst betrachte man die Funktion

$$w_{\varphi_n}(\zeta,z)=\frac{K_{\varphi_n}(\zeta,z)}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)}. \tag{31}$$

Nach Satz I ist sie vom endlichen Typus und nach (26) beträgt ihr Integral

$$\lambda_{\varphi_n}(\zeta)=\frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)}. \tag{32}$$

Wir sind mit dem Beweis fertig, wenn wir nachweisen, daß $\lambda_{\varphi_n}(\zeta)$ nach unten beschränkt ist.

$\lambda_{\varphi_n}(\zeta)$ ist das Integral einer Funktion, die an der Stelle ζ den Wert 1 annimmt. Man bezeichne mit K_ζ den größten schlichten Kreis in $\mathfrak{B}$ um den Punkt ζ herum. $w(z)$ sei irgendeine Funktion, die im Punkte ζ den Wert 1 hat, also dort eine Entwicklung

$$w(z)=1+a_1(z-\zeta)+a_2(z-\zeta)^2\ldots \tag{33}$$

zuläßt. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{B}} w(z)\overline{w(z)}\,d\omega \geqq \int_{K_\zeta} w(z)\overline{w(z)}\,d\omega=\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2\frac{r_\zeta^{2\nu+2}}{2\nu+2}\geqq\pi\cdot r_\zeta^2, \tag{34}$$

wobei r_ζ den Radius des Kreises K_ζ bedeutet. Es besteht also insbesondere die Relation

$$\lambda_{\varphi_n}(\zeta)\geqq\pi r_\zeta^2, \tag{35}$$

es genügt also für $F(\zeta)$ die Funktion $1:\pi r_\zeta^2$ zu wählen.

10. Es ist bemerkenswert, daß die Funktion $w_{\varphi_n}(\zeta,z)$ unter allen Funktionen

$$x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+\ldots+x_n\varphi_n(z) \tag{36}$$

die an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral aufweist. Denn das Integral der Funktion (36) beträgt

$$|x_0|^2+|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2 \tag{37}$$

und aus den Beziehungen

$$|x_0\varphi_0(\zeta)+x_1\varphi_1(\zeta)\ldots+x_n\varphi_n(\zeta)|^2\leqq(|x_0|^2\ldots+|x_1|^2)K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta) \tag{38}$$

und

$$x_0\varphi_0(\zeta)+x_1\varphi_2(\zeta)+\ldots+x_n\varphi_n(\zeta)=1 \tag{39}$$

olgt

$$(40)\quad \int_{\mathfrak{B}} |x_0\varphi_0(z)\dots+x_n\varphi_n(z)|^2\,d\omega = |x_0^2|\dots+|\widehat{x}_n|^2 \geqq \frac{}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)} = \lambda_{\varphi_n}(\zeta).$$

In der Relation (38) kann aber das Gleichheitszeichen im wesentlichen nur für einen einzigen Wertekomplex x_ν richtig sein, folglich ist $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ sogar die einzige Minimalfunktion.

§ 3.

Entwicklungen nach Orthogonalsystemen.

11. Aus der Beschränktheit von $K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)$ für alle n folgt die Existenz der Funktionen:

$$(41)\quad K_\varphi(\zeta,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(\zeta)|^2 \leqq F(\zeta)$$

und

$$(42)\quad K_\varphi(\zeta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(\zeta)}\varphi_n(z).$$

Hieraus schließen wir nach Schwarz, daß jede lineare Verbindung

$$(43)\quad f(z) = c_0\varphi_0(z) + c_1\varphi_1(z) + \dots$$

in jedem, von den Windungspunkten verschiedenen Punkte konvergiert, sofern nur

$$(44)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2$$

endlich ist.

Die Konvergenz ist überdies in der Umgebung jedes Nichtwindungspunktes gleichmäßig. Diese lineare Verbindung stellt also eine in $\mathfrak{B}$ bis auf die Windungspunkte analytische Funktion dar.

Diese Funktion ist sogar vom endlichen Typus. Um dies einzusehen, fassen wir den Bereich $\mathfrak{B}'$ ins Auge, der aus $\mathfrak{B}$ durch Fortlassung der Windungspunkte entsteht. Jede über $\mathfrak{B}$ integrierbare Funktion ist auch über $\mathfrak{B}'$ integrierbar und umgekehrt, und die entsprechenden Integrale sind einander gleich. Wir approximieren jetzt $\mathfrak{B}'$ durch die Ausschöpfungsfolge $\mathfrak{B}'_n$. In jedem Bereich $\mathfrak{B}'_n$ konvergiert die Reihe (43) gleichmäßig. Wir können also ansetzen

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{B}'_n} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega &= \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathfrak{B}'_n} |c_0\varphi_0(z)\dots+c_\nu\varphi_\nu(z)|^2\,d\omega \\ &\leqq \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathfrak{B}'} |c_0\varphi_0(z)\dots+c_\nu\varphi_\nu(z)|^2\,d\omega \\ &= |c_0|^2+|c_1|^2+|c_2|^2+\dots.\end{aligned}$$

Also auch

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega \leqq \sum |c_\nu|^2. \tag{45}$$

Hiermit ist dieser Punkt bewiesen.

Wir setzen jetzt den Ausdruck

$$f(z)\overline{\varphi_k(z)} = c_0\varphi_0(z)\overline{\varphi_k(z)} + c_1\varphi_1(z)\overline{\varphi_k(z)} + \dots \tag{46}$$

an. Wir machen jetzt wieder von den Bereichen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}'_n$ Gebrauch. Wir können schreiben

$$\int_{\mathfrak{B}'_n} f(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega. \tag{47}$$

Die rechte Seite von (47) wollen wir schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu y_\nu^{(n)}$$

wobei

$$\lim_{n\to\infty} y_\nu^{(n)} = y_\nu = \int_{\mathfrak{B}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega. \tag{49}$$

Überdies ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2$ endlich. Wenn wir noch nachweisen können, daß die Quadratsumme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |y_\nu^{(n)}|^2 \tag{50}$$

für alle n unterhalb einer festen Zahl bleibt, dann folgt hieraus nach einem bekannten Satz über lineare Formen:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu y_\nu^{(n)} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu y_\nu. \tag{51}$$

Für uns würde sich daraus ergeben

$$c_k = \int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega. \tag{52}$$

Aus (45) ersieht man die Relation:

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} c_i \bar{c}_k \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega \leqq |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots. \tag{53}$$

Setzt man hierin

$$a_{ik}^{(n)} = \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,du$$

ann besagt (53), daß die quadratische Form

$$\sum_{i,k}^{\infty} a_{i,k}^{(n)} x_i \bar{x}_k$$

eschränkt ist und die obere Schranke 1 besitzt. Hieraus folgt aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}^{(n)}|^2 \leqq 1.$$

Da aber

$$a_{0k}^{(n)} = y_k^{(n)},$$

st die Relation (51) berechtigt.

Aus (52) kann man schließen: Die Null läßt keine Entwicklung nach den $\varphi_\nu(z)$ mit Koeffizienten von endlicher Quadratsumme zu, es sei denn, daß die Koeffizienten sämtlich verschwinden.

Aus (52) und der Besselschen Ungleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} d\omega \right| \leqq \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

olgt unter Hinzurechnung von (45) die Gleichung:

(54) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

Wir fassen diese Resultate zusammen im folgenden:

Satz III. *Es sei ein Orthogonalsystem*

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots$$

gegeben und die Zahlen c_ν mögen eine endliche Summe der Quadrate der absoluten Beträge aufweisen, dann stellt die lineare Verbindung

(43) $$f(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \ldots$$

eine Funktion vom endlichen Typus dar und zwar beträgt ihr Integral

(54) $$\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots$$

Für die Koeffizienten c_ν hat man die eindeutige Darstellung

(52) $$c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} d\omega.$$

12. Unter Berücksichtigung des eben ausgesprochenen Satzes können wir die im Punkt 10 angestellten Betrachtungen sofort auf unendliche Orthogonalsysteme übertragen. Wenn im Nichtwindungspunkte ζ nicht sämtliche Funktionen $\varphi_\nu(z)$ verschwinden, dann bilde man die Funktion:

(55) $$w_\varphi(\zeta, z) = \frac{K_\varphi(\zeta, z)}{K_\infty(\zeta, \zeta)}.$$

Diese Funktion hat unter allen Funktionen

$$x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+\cdots \qquad \Sigma|x_\nu|^2 \text{ endlich},$$

welche an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral. Dieses Integral beträgt

$$\lambda_\varphi(\zeta)=\frac{1}{K_\varphi(\zeta,\zeta)}. \tag{56}$$

$w_\varphi(\zeta,z)$ liefert auch die einzige Lösung der Minimumaufgabe. Aus den Eigenschaften der Kernfunktion $K_{\varphi_n}(\zeta,z)$ folgt leicht, daß man die Funktion $w_\varphi(\zeta,z)$ gleichmäßig approximieren kann durch die Funktionen $w_{\varphi_n}(\zeta,z)$. Also die Minimalfunktion $w_\varphi(\zeta,z)$ für das ganze System $\varphi_\nu(z)$ kann approximiert werden durch die Minimalfunktionen für die reduzierten Systeme

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z).$$

Wir formulieren den

Satz IV. *Wenn die Funktionen $\varphi_\nu(z)$ eines Orthogonalsystems nicht alle zugleich an dem Punkte ζ, der kein Windungspunkt sein soll, verschwinden, dann besitzen die Integrale aller linearen Verbindungen*

$$x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+x_2\varphi_2(z),\ \ldots,$$

für welche $\Sigma|c_\nu|^2$ konvergent ist, und die in ζ den Wert annehmen, ein Minimum. Es beträgt

$$\lambda_\varphi(\zeta)=\frac{1}{K_\varphi(\zeta,\zeta)}. \tag{56}$$

Die dazugehörige Minimalfunktion ist eindeutig:

$$w_\varphi(\zeta,z)=\frac{K_\varphi(\zeta,z)}{K_\varphi(\zeta,\zeta)}. \tag{57}$$

Die Funktionen (56) *und* (57) *können durch die Funktionen*

$$\lambda_{\varphi_n}(\zeta)=\frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)} \tag{58}$$

und

$$w_{\varphi_n}(\zeta,z)=\frac{K_{\varphi_n}(\zeta,z)}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)} \tag{59}$$

approximiert werden, welche dieselben Minimaleigenschaften in bezug auf die reduzierten Systeme

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z)$$

aufweisen.

13. Von einem Orthogonalsystem $\varphi_\nu(z)$ wollen wir sagen, daß es in ζ abgeschlossen ist, wenn jede zu allen Funktionen $\varphi_\nu(z)$ orthogonale Funk-

ion im Punkte ζ verschwindet. Wenn ein System in einer Folge von unkten abgeschlossen ist, welche sich im Innern von $\mathfrak{B}$ häufen, dann uß eine zum System orthogonale Funktion identisch verschwinden. Ein erartiges System wollen wir kurz als abgeschlossen bezeichnen.

Satz V. *Jede Funktion vom endlichen Typus läßt sich nach den unktionen eines abgeschlossenen Systems entwickeln und zwar in der ourierschen Gestalt:*

$$f(\mathfrak{B}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\omega. \tag{60}$$

ls Entwicklung mit Koeffizienten mit konvergenter Quadsumme ihrer bsoluten Beträge ist die Darstellung (60) *sogar eindeutig.*

Man bilde die Differenz

$$R(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\omega. \tag{61}$$

Diese Funktion ist nach der Besselschen Ungleichung, nach Satz 3 (Punkt 11) und Satz 1 (Punkt 7) vom endlichen Typus. Das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} R(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega$$

at demnach einen Sinn, und zwar kann man für $R(z)$ den Ausdruck aus der Gleichung (61) einsetzen und gliedweise integrieren, wie wir im Punkt 11 festgestellt haben. Hieraus

$$\int_{\mathfrak{B}} R(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega = 0. \tag{62}$$

Aus der Abgeschlossenheit des Systems folgt danach, daß die Funktion $R(z)$ identisch verschwinden muß, daß also

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\omega. \tag{60}$$

Über den Zusammenhang der Abgeschlossenheit mit der Vollständigkeit im Hilbertschen Sinne wird an einer späteren Stelle die Rede sein (§ 5).

§ 4.

Beweis für die Existenz abgeschlossener Systeme.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, ob es zu jedem Bereiche ein abgeschlossenes System gibt.

14. Zu diesem Zweck wollen wir zuvor etwas auf die Frage der Orthogonalisierung von Funktionen eingehen.

Es sei eine Folge von Funktionen vom endlichen Typus gegeben:

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots$$

von denen nicht endlich viele linear abhängen. Man bilde aus ihnen nach dem Schmidtschen Verfahren das Orthogonalsystem

$$(63)\quad \varphi_n(z) = c_{n0}F_0(z) + c_{n1}F_1(z) + \ldots + c_{nn}F_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei ist c_{kk} immer von Null verschieden. Hieraus sieht man sofort, daß die $n+1$ ersten Funktionen $\varphi_\nu(z)$ dann und nur dann an einer Stelle ζ verschwinden können, wenn es die $n+1$ ersten Funktionen $F_\nu(z)$ tun, und umgekehrt. Die Funktionen

$$F_0(z), F_1(z), \ldots, F_n(z)$$

mögen nun in ζ (kein Windungspunkt!) nicht zugleich verschwinden. Dann suche man unter allen Funktionen

$$x_0F_0(z) + x_1F_1(z) + \ldots + x_nF_n(z),$$

welche an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, diejenige heraus, welche das kleinste Integral aufweist. Man kommt dann offenbar auf die Funktion

$$(64)\quad w_{F_n}(\zeta, z) = w_{\varphi_n}(\zeta, z) = \frac{K_{\varphi_n}(\zeta, z)}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}$$

und das Minimum

$$(65)\quad \lambda_{F_n}(\zeta) = \lambda_{\varphi_n}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}.$$

Hieraus können wir ableiten den

Satz VI. *Es mögen zwei Folgen von Funktionen vom endlichen Typus gegeben sein:*

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots$$

und

$$G_0(z),\ G_1(z),\ G_2(z)\ldots.$$

und es möge jede Funktion $F(z)$ in der $G(z)$-Folge vorkommen. Man streiche jetzt in jeder der Folgen alle solche Funktionen, die sich als lineare Verbindung voraufgehender Funktionen darstellen lassen. Die zurückgebliebenen Funktionen bringe man durch Orthogonalisierung in die Gestalt:

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,$$

$$\psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \ldots,$$

dann besteht die Relation:

$$(66)\quad K_\varphi(\zeta, \zeta) \leqq K_\psi(\zeta, \zeta).$$

Man greife einen Punkt ζ heraus. Wenn $K_\varphi(\zeta,\zeta)$ verschwindet, dann ist (66) offenbar richtig. Sonst gibt es eine Zahl n, so daß $K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)$ von Null verschieden ist, wenn $n \geqq N$. Man greife eine solche Zahl n heraus. Der reziproke Wert von $K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)$ bedeutet aber nach (65) ein gewisses Minimum, in welches n Funktionen $F(z)$ eingehen. Dann kann man aber einen genügend großen Index n_1 angeben, von der Art, daß unter den Funktionen $G(z)$, welche in $K_{\varphi_{n_1}}(\zeta,\zeta)$ eingehen, sich alle fraglichen Funktionen F befinden, oder gewisse gleichwertige Funktionen $G(z)$ wenn nämlich in der $G(z)$-Folge die eine oder andere Funktion $F(z)$ nicht mehr vorhanden sein sollte, weil sie als lineare Verbindung vorausgehender $F(z)$ und $G(z)$ gestrichen wurde]. Das entsprechende Minimum ist jedenfalls nicht größer als

$$\frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta)},$$

also

$$K_{\varphi_n}(\zeta,\zeta) \leqq K_{\varphi_{n_1}}(\zeta,\zeta).$$

Hieraus folgt aber:

$$K_\varphi(\zeta,\zeta) \leqq K_\psi(\zeta,\zeta), \tag{66}$$

womit unser Satz bewiesen ist.

15. Wir fassen jetzt einen Nichtwindungspunkt ζ ins Auge. Wir bilden alle möglichen Orthogonalsysteme und die dazugehörigen Funktionen

$$K_\varphi(\zeta,\zeta).$$

Da doch diese Zahlen für alle Systeme $\varphi(z)$ beschränkt sind, besitzen sie eine obere Grenze, die wir mit

$$K(\zeta,\zeta)$$

bezeichnen.

Wir beweisen nun in erster Linie, daß diese obere Grenze ein Maximum ist, d. h. daß es mindestens ein Orthogonalsystem gibt, dessen Kern an der Stelle ζ den Wert $K(\zeta,\zeta)$ annimmt. Der Fall $K(\zeta,\zeta)=0$ erledigt sich sofort; wir schließen ihn daher aus. Man wähle nun eine Folge von Kernzahlen

$$K_{\varphi^{(1)}}(\zeta,\zeta), \quad K_{\varphi^{(2)}}(\zeta,\zeta),$$

welche gegen $K_\varphi(\zeta,\zeta)$ konvergieren. Die dazugehörigen Orthogonalsysteme mögen lauten:

$$\begin{array}{llll} \varphi_0^{(1)}(z), & \varphi_1^{(1)}(z), & \varphi_2^{(1)}(z), & \cdots \\ \varphi_0^{(2)}(z), & \varphi_1^{(2)}(z), & \varphi_2^{(2)}(z), & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Wenn man jetzt alle diese Funktionen in eine Reihe ordnet, die linear

abhängigen nach unserer Vorschrift streicht und den Rest orthogonalisiert, dann erhält man ein System der gewünschten Art. Denn berechnet man seinen Kern mit

$$K_\varphi(\zeta, z),$$

dann bestehen nach Satz VI die Ungleichungen:

$$K_\varphi(\zeta,\zeta) \geqq K_{\varphi^{(n)}}(\zeta,\zeta).$$

Aus der Definition von $K(\zeta,\zeta)$ schließt man sofort auf

$$K_\varphi(\zeta,\zeta) \geqq K(\zeta,\zeta),$$

da aber $K(\zeta,\zeta)$ die obere Grenze aller Kernwerte in ζ bedeutet, ist es nur möglich, daß

$$K_\varphi(\zeta,\zeta) = K(\zeta,\zeta). \tag{67}$$

Das so erhaltene System ist offenbar in ζ abgeschlossen, denn jede weitere in ζ nicht verschwindende Orthogonalfunktion würde den Kern vergrößern, was aber unmöglich ist.

Nimmt man jetzt eine Folge von Punkten ζ_ν, die gegen einen inneren Punkt des Bereiches konvergieren, bestimmt dann dazugehörige abgeschlossene Systeme und bildet aus all diesen Systemen ein neues Orthogonalsystem, dann muß nach Satz VI dieses System in jedem Punkte ζ_ν abgeschlossen, also auch im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ abgeschlossen sein.

Satz VII. *Es gibt mindestens ein abgeschlossenes Orthogonalsystem.*

16. Man überzeugt sich leicht, daß der Kern des Bereiches — so wollen wir die Funktion $K_\eta(\zeta,\zeta)$ bezeichnen — nur in Punkten verschwinden kann, die sich nirgends im Inneren häufen.

Satz VIII. *ζ sei ein Punkt, in welchem $K(\zeta,\zeta)$ nicht verschwindet. Dann liefert*

$$w(\zeta, z) = \frac{K(\zeta, z)}{K(\zeta,\zeta)} \tag{68}$$

in eindeutiger Weise diejenige Funktion, welche von allen Funktionen, die in ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral hat.

Denn jede Funktion vom endlichen Typus läßt sich nach einem bestimmten abgeschlossenen System entwickeln. Jetzt brauchen wir nur noch Satz IV (Punkt 12) anzuwenden.

Als interessante Folgerung möchten wir festhalten, daß für alle abgeschlossenen Systeme nicht nur $K_\eta(\zeta,\zeta)$, sondern auch die Funktion $K_\varphi(\zeta, z)$ dieselbe ist.

Beschränken wir uns für den Augenblick auf einfach zusammenhängende

reiche. Wenn $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ eindeutig und analytisch ist, dann ist es auch
Funktion

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

(z) liefert dann eine (im weiteren Sinne) konforme Abbildung von $\mathfrak{B}$
f einen Bereich vom Inhalt

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z)\overline{f(z)}\,d\omega.$$

tz VIII besagt dann, daß es unter allen solchen Abbildungen, die im
nkte ζ flächentreu sind, eine und nur eine gibt, für welche der Inhalt
s Bildbereiches ein Minimum hat.

Nach Bieberbach (l. c.) liefert das Linienintegral von $w(\zeta, z)$ eine
nktion, welche den Bereich auf einen Kreis abbildet. Und wegen der
ichtigkeit dieser Funktion ist es von Belang, daß man die Funktion
(ζ, z) gleichmäßig approximieren kann durch die Funktionen $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$
gendeines abgeschlossenen Systems. Besonders dann, wenn man ein ab-
schlossenes System auf einfache Art herstellen kann.

Wir führen hier ohne Beweis an, daß man z. B. für einen schlichten,
n einer Jordanschen Kurve eingeschlossenen Bereich ein abgeschlossenes
stem durch Orthogonalisierung der Funktionen

$$1, z, z^2, z^3, \ldots$$

reichen kann. Die Kreisabbildungsfunktion läßt sich dann approximieren
rch Polynome, von denen jedes unter den Polynomen desselben Grades
e Minimaleigenschaft besitzt (Bieberbach, l. c.).

§ 5.

Gegenseitige Beziehungen von Orthogonalsystemen.

17. Es liege ein abgeschlossenes System $\varphi_\nu(z)$ vor. $\psi_\nu(z)$ sei ein
deres System, über das wir nichts weiter voraussetzen. Nach Satz V
nnen wir entwickeln:

9) $$\psi_i(z) = \alpha_{i0}\varphi_0(z) + \alpha_{i1}\varphi_1(z) + \ldots \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

ach Satz III folgern wir die Relationen

0) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in}\bar{\alpha}_{kn} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

ieraus ist ersichtlich, daß die lineare Substitution

1) $$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in} x_n, \qquad \alpha_{ik} = \int_{\mathfrak{B}} \psi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega$$

zeilenweis normiert und orthogonal, also jedenfalls beschränkt ist. Ei derartiges Zeilensystem kann man aber auf alle Fälle zu einem solche vervollständigen, welches auch kolonnenweis normiert und orthogonal is Die hinzukommenden Zeilen seien

$$\beta_{i0},\ \beta_{i1},\ \beta_{i2},\ \ldots,$$

und die entsprechenden Funktionen:

$$\psi_i'(z) = \beta_{i0}\varphi_0(z) + \beta_{i1}\varphi_1(z) + \beta_{i2}\varphi_2(z) + \ldots \tag{72}$$

Die Funktionen $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ bilden zusammengenommen ein Ortho gonalsystem, und aus den Relationen

$$\sum_{n=0} \alpha_{ni}\bar{\alpha}_{nk} + \sum_n \beta_{ni}\bar{\beta}_{nk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \tag{73}$$

schließt man auf:

$$\sum_i |\psi_i(\zeta)|^2 + \sum_i |\psi_i'(\zeta)|^2 = \sum_i |\varphi_i(\zeta)|^2. \tag{74}$$

Daraus ersieht man, daß dann und nur dann die Gleichung

$$K_\varphi(\zeta, \zeta) = K_\psi(\zeta, \zeta)$$

bestehen kann, wenn sämtliche Funktionen $\psi'(z)$, also nach Satz II sämtliche Koeffizienten β verschwinden. Also:

Satz IX. *Aus einem abgeschlossenen System geht jedes andere ab geschlossene System durch eine vollständige orthogonale Substitution her vor; umgekehrt liefert jede vollständige orthogonale Substitution eine abgeschlossenen Systems wiederum ein System derselben Art.*

Jedes Orthogonalsystem kann durch Hinzufügung von Funktione abgeschlossen werden.

18. Aus der Relation

$$\int_{\mathfrak{B}} \Big| f(z) - \sum_\nu \varphi_\nu(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\Big|^2 = \int_{\mathfrak{B}} f(z)\,\overline{f(z)}\,d\omega - \sum_\nu \Big| \int_{\mathfrak{B}} f(z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\omega\Big|^2 \tag{75}$$

ersehen wir sofort den

Satz X. *Jedes abgeschlossene System ist im Hilbertschen Sinne voll ständig*[7]) *und umgekehrt.*

---

[7]) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen Teubner, 1912, Seite IX.

19. Wir gehen jetzt auf eine Verallgemeinerung des Satzes IX (Pkt. 17) aus. Um diese abzuleiten, schicken wir eine andere Betrachtung voraus:

Satz XI. *Es sei eine beschränkte quadratische Form*

$$\sum_{i,k} a_{ik} \bar{x}_i x_k$$

und ein beliebiges Orthogonalsystem $\varphi_\nu(z)$ *gegeben. Die Funktion*

76) $$M(\zeta,\zeta) = \sum_{i,k} a_{ik} \overline{\varphi_i(\zeta)} \varphi_k(\zeta)$$

verschwindet dann und nur dann identisch in ζ, *wenn alle Koeffizienten* a_{ik} *identisch verschwinden.*

Zuerst weisen wir nach, wie nach den Voraussetzungen des Satzes auch die Funktion zweier Variablen

77) $$M(\zeta,z) = \sum_{i,k} a_{ik} \overline{\varphi_i(\zeta)} \varphi_k(z)$$

identisch verschwinden muß. Denn man greife einen Nichtwindungspunkt heraus und verlege ihn, der Einfachheit wegen, in den Anfangspunkt. Um diesen Punkt herum können wir entwickeln:

78) $$M(\zeta,z) = \sum_{l,k \geq 0} c_{lk} \bar{\zeta}^l z^k = \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{l+k=s} c_{lk} \bar{\zeta}^l z^k \Big).$$

Wir betrachten zpeziell die Funktion

79) $$M(\zeta,\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{l+k=s} c_{lk} \bar{\zeta}^l \zeta^k \Big).$$

Man setze hierin

$$\zeta = r e^{\vartheta i},$$

also

80) $$M(\zeta,\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} r^s \Big(\sum_{l+k=s} c_{lk} e^{(l-k)\vartheta i} \Big);$$

lassen wir in (80) ϑ fest und lassen r variieren und bedenken, daß $M(\zeta,\zeta)$ identisch verschwinden soll, dann kommen wir auf die Gleichung

81) $$\sum_{l+k=s} c_{lk} e^{(l-k)\vartheta i} = 0.$$

Der linksstehende Ausdruck in der letzten Gleichung kann aber als Polynom in $e^{\vartheta i}$ nur dann identisch verschwinden, wenn jeder Koeffizient c_{ik} identisch verschwindet. Folglich verschwindet $M(\zeta,z)$ identisch in ζ und z.

Hält man jetzt einen Punkt ζ fest, dann ist $M(\zeta,z)$ als Funktion der Variablen z vom endlichen Typus, weil die Form $\Sigma a_{ik} \bar{x}_i x_k$ beschränkt

ist. Wenn sie aber identisch verschwindet, dann müssen nach Satz III die Gleichungen:

$$\sum_i a_{ik}\overline{\varphi_i(\zeta)} = 0 \tag{82}$$

bestehen. Aus demselben Satze folgt dann aber

$$a_{ik} = 0,$$

was zu beweisen war.

20. Es mögen jetzt zwei Orthogonalsysteme: $\varphi_\nu(z)$ und $\psi_\nu(z)$ gegeben sein. Wir vervollständigen das $\varphi(z)$-System durch die Funktionen $\varphi'(z)$ [Satz X] und entwickeln

$$\psi_i(z) = \alpha_{i0}\varphi_0(z) + \alpha_{i1}\varphi_1(z) + \ldots + \alpha_{i0}\varphi_0'(z) + \alpha_{i1}'\varphi_1'(z) + \ldots;$$

hieraus bilden wir

$$\sum|\psi_i(\zeta)|^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)} + 2\Re\sum_{i,k} b_{ik}\varphi_i(\zeta)\overline{\varphi_k'(\zeta)} + \sum c_{ik}\varphi_i'(\zeta)\overline{\varphi_k'(\zeta)}, \tag{83}$$

wobei wir gesetzt haben:

$$a_{ik} = \sum_n \alpha_{ni}\overline{\alpha_{nk}}, \qquad b_{ik} = \sum_n \alpha_{ni}\overline{\alpha_{nk}'}, \qquad c_{ik} = \sum \alpha_{ni}'\overline{\alpha_{nk}'}.$$

Die Form (83) ist, als quadratische Form in $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ betrachtet, beschränkt. Wenn wir noch voraussetzen, daß

$$K_\varphi(\zeta,\zeta) = K_\psi(\zeta,\zeta),$$

dann ergibt sich aus (83) unter Hinzuziehung von Satz XI

$$c_{ii} = 0,$$

daß also jeder Koeffizient α' verschwindet und

$$\psi_i(\zeta) = \alpha_{i0}\varphi_0 + \alpha_{i1}\varphi_1 + \ldots.$$

Satz XII. *Wenn für zwei Orthogonalsysteme $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die Gleichung*

$$K_\psi(\zeta,\zeta) = K_\varphi(\zeta,\zeta)$$

besteht, dann geht das eine System aus dem andern durch eine vollständige orthogonale Substitution hervor.

§ 6.

Über eine spezielle Art von Orthogonalsystemen.

Den bisherigen Entwicklungen lagen die allgemeinsten Funktionen vom endlichen Typus zugrunde; wir ließen insbesondere Pole in den Windungspunkten zu. In diesem Paragraphen wollen wir uns auf Funktionen

schränken, die auch in den Windungspunkten endlich sind, in deren otenzreihenentwicklungen also nie Potenzen mit negativen Exponenten rkommen; und nur solche Funktionen wollen wir als vom endlichen ypus auszeichnen. Es ist möglich, daß jetzt noch mehr Bereiche als im lgemeinen Falle ausschalten, für die es also keine Funktion vom end-chen Typus gibt. Während wir sonst die Windungspunkte immer aus-hmen mußten, können wir sie jetzt den sonstigen inneren Punkten gleich-ellen; sie verlieren jede Ausnahmestellung.

21. Wir weisen zuerst nach, daß der Kern eines beliebigen Orthogonal-stems in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{B}$ beschränkt ist, und war gleichmäßig für alle Systeme.

ζ_1 sei ein Windungspunkt $k-1$-ter Ordnung, den wir der Einfachheit alber in den Anfangspunkt verlegen. Wir fassen die größte k-blättrige reisumgebung $\mathfrak{R}$ von ζ_1 ins Auge und bezeichnen ihren Radius mit $(2r)^k$. ine Funktion vom endlichen Typus läßt dann die in $\mathfrak{R}$ konvergierende ntwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1 z^{\frac{1}{k}} + a_2 z^{\frac{2}{k}} + a_3 z^{\frac{3}{k}} + \dots$$

n. Um den Wert des Integrals von $f(z)$ über $\mathfrak{R}$ nach unten einzuschrän-en, führen wir die Funktion

$$F(z) = \int_0^z f(z)\,dz = a_0 z^{\frac{k}{k}} + \frac{a_1}{1+\frac{1}{k}} z^{1+\frac{1}{k}} + \frac{a_2}{1+\frac{2}{k}} z^{1+\frac{2}{k}} + \dots$$

in. Dann lautet das Integral

$$J = \int_{\mathfrak{R}} \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 dx\,dy.$$

Wir führen jetzt die Transformation

$$z = z'^k$$

in, durch welche $\mathfrak{R}$ in einen Kreis K mit dem Radius $2r$ übergeht. Das Integral lautet:

$$J = \int_K \left|\frac{dF}{dz'}\right|^2 dx'\,dy'.$$

n

$$\frac{dF}{dz'} = k\,(a_0 z'^{k-1} + a_1 z'^k + a_2 z'^{k+1} + \dots)$$

etze man

$$x + iy = \varrho e^{\vartheta_1 i}, \qquad 0 \leqq \varrho \leqq 2r, \qquad 0 \leqq \vartheta_1 \leqq 2\pi;$$

lann ist

$$J = \text{konst.} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \frac{(2r)^{2k+2i}}{k+i}.$$

Dafür schreiben wir

$$J = \text{konst.} \sum |x_i|^2$$

und denken an die Substitution:

$$x_i = a_i \frac{(2r)^{k+i}}{\sqrt{k+i}}.$$

Wenn nun die Funktion $f(z)$ in einem innerhalb $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkte den Wert 1 annimmt, einem Punkte, dem in K der Punkt

$$\zeta' = \zeta^{\frac{1}{k}}$$

entspricht, dann haben wir die Bedingung

$$a_0 + a_1 \zeta' + a_2 \zeta'^2 + \ldots = 1.$$

Wir schreiben sie

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots = 1,$$

wobei

$$y_i = \frac{\zeta'^i}{(2r)^{k+i}} \sqrt{k+i}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Summe

$$\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2$$

konvergent ist. Der Ausdruck

$$\sum |x_i|^2$$

hat aber unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i = 1$$

das Minimum

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2}.$$

Folglich ist

$$J \geqq \text{konst.} \frac{1}{\sum |y_i|^2},$$

und zwar kann man für alle Punkte $|\zeta'| \leqq r$, oder

$$|\zeta| \leqq r^k$$

eine gleichmäßige Schranke angeben:

$$J \geqq \text{konst.} \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k+i}{2^{k+i}}}.$$

Es liege jetzt ein abgeschlossener Teilbereich $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$ vor. In Anhluß an § 2, Punkt 9 wollen wir beweisen, daß für jedes System $\varphi_\nu(z)$ e Minimalzahl

$$\lambda_\varphi(\zeta)$$

allen Punkten von $\mathfrak{B}_1$ gleichmäßig beschränkt ist.

Man bedenke, daß $\mathfrak{B}_1$ als geschlossene Teilmenge von $\mathfrak{B}$ nur endlich ele Windungspunkte enthalten kann. Man schneide aus $\mathfrak{B}_1$ jeden Winngspunkt ζ_ν mitsamt der kreisförmigen Umgebung vom Radius r_ν^k heraus. ür jede dieser, in endlicher Zahl vorhandener Punktmengen haben wir n Satz eben bewiesen. Für den übrigen Teil von $\mathfrak{B}_1$ folgt unsere Beauptung aus Satz II.

Alle übrigen Sätze, die sich auf die allgemeinen Funktionen vom ıdlichen Typus bezogen, gelten auch jetzt, und zwar mit Einschluß der Vindungspunkte. Die so erhaltenen abgeschlossenen Systeme werden selbstrständlich im allgemeinen Falle nicht dieselben sein wie im jetzigen ezielleren Falle. Ähnliches gilt von den Minimalfunktionen $w_\varphi(\zeta, z)$.

(Eingegangen am 7. Juni 1921.)

Über konvexe Körper.

Von

Dénes König in Budapest.

Wir geben einen *rein geometrischen* Beweis des folgenden Helly-Radonschen Satzes[1]):

Eine Menge konvexer Körper im gewöhnlichen n-dimensionalen Raum R_n hat immer einen gemeinsamen Punkt, wenn je $(n+1)$ Körper einen Punkt gemein haben.

Als konvexer Körper wird bekanntlich eine im Endlichen gelegene abgeschlossene Punktmenge bezeichnet, falls mit irgend zwei ihrer Punkte auch sämtliche Punkte der Verbindungsstrecke zu ihr gehören. Diejenigen konvexen Körper, die schon in einem Raum niedrigerer als n-ter Dimension liegen und also im R_n keinen inneren Punkt besitzen, werden hier *nicht* ausgeschlossen und so gilt z. B. auch ein einzelner Punkt als konvexer Körper.

Unser Beweis beruht auf folgenden zwei bekannten und leicht beweisbaren Hilfssätzen:

a) Haben die konvexen Körper A und B des R_n keinen gemeinsamen Punkt, so gibt es im R_n eine „Ebene" R_{n-1}, die so beschaffen ist, daß sie weder aus A noch aus B Punkte enthält und diese zwei Körper voneinander trennt.

b) Zu jeder im Endlichen gelegenen Punktmenge M im R_n gibt es einen „kleinsten" konvexen Körper K von der Beschaffenheit, daß jeder konvexe Körper in dem M enthalten ist, auch den Körper K enthält.

Es sei erstens die Menge der gegebenen konvexen Körper *endlich*. Wir bezeichnen diese konvexen Körper mit

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}.$$

---

[1]) J. Radon, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. Mathematische Annalen 83 (1921), S. 113–115.

Ist $n = 1$, so ist der zu beweisende Satz unmittelbar evident. (Im R_1 ist ein konvexer Körper ein geschlossenes Intervall oder ein einzelner Punkt.) Der Satz ist ferner für beliebiges n trivial, falls $k = n$ ist. Wollen wir also den Satz für die Körperzahl $k+1$ im R_n beweisen, so dürfen wir, indem wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden, voraussetzen, daß er richtig ist 1. im R_{n-1} für eine beliebige Körperzahl und 2. im R_n für die Körperzahl k.

Nach der letzten Bemerkung besitzt A_{k+1} mit jedem der konvexen Körper[2])

$$1) \qquad A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1},\ A_1 \dots A_{k-2} A_k,\ \dots,\ A_2 A_3 \dots A_k$$

einen gemeinsamen Punkt und auch $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ enthält wenigstens einen Punkt. Wäre der Satz nicht richtig, so würden A_{k+1} und $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ keinen gemeinsamen Punkt enthalten und dann gäbe es — nach Hilfssatz a) — einen R_{n-1}, der weder mit A_{k+1}, noch mit $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ einen gemeinsamen Punkt besitzt und diese zwei konvexen Körper voneinander trennt. Wir beweisen nun, daß dieser R_{n-1} einen Punkt α_k in $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ hat. Hierzu genügt es zu zeigen, daß auf beiden Seiten von R_{n-1} Punkte von $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ liegen; und in der Tat liegt auf der einen Seite der gemeinsame Punkt von $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ und von A_{k+1} und auf der anderen irgendein Punkt von $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$. Ebenso liegt in jedem der Körper (1) je ein Punkt des R_{n-1}. Seien diese Punkte der Reihenfolge in (1) entsprechend:

$$\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1.$$

Es sei nun

Γ_k der kleinste konvexe Körper über $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}$;

Γ_{k-1} „ „ „ „ „ $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_k$;

. . . . . .

Γ_1 „ „ „ „ „ $\alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$.

Diese konvexen Körper $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ des R_{n-1} sind so beschaffen, daß je $(k-1)$ von ihnen einen gemeinsamen Punkt besitzen (so ist z. B. für $\Gamma_k, \Gamma_{k-1}, \dots, \Gamma_2$ der Punkt α_1 ein gemeinsamer Punkt). Da wir $n \leqq k-1$ voraussetzen können (für $k = n$ ist ja der Satz trivial), so enthalten auch je n dieser Γ's einen gemeinsamen Punkt. Nun ist aber unser Satz für den R_{n-1} als richtig vorausgesetzt, also besitzen sämtliche Γ's einen gemeinsamen Punkt α.

Die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}$ sind sämtlich Punkte des A_k, also ist auch Γ_k in A_k enthalten. Ebenso ist Γ_{k-1} ein Teil von $A_{k-1}, \dots,$

[2]) Wir bezeichnen den gemeinsamen Bestandteil von $A, B, C, \dots$ durch das Produkt $ABC\dots$. Dies ist ebenfalls ein konvexer Körper.

Γ_1 ein Teil von A_1. Der Punkt a von $\Gamma_1 \dots \Gamma_{k-1} \Gamma_k$ ist also in $A_1 \dots A_{k-1} A_k$ enthalten. Dies steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß kein Punkt von $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ in R_{n-1} enthalten ist. Damit ist also der Satz für eine endliche Zahl von konvexen Körpern bewiesen.

Daß der Satz auch für eine *unendliche* Menge konvexer Körper richtig ist, ist eine unmittelbare Folge des folgenden Satzes von F. Riesz[4]):

Hat ein System von abgeschlossenen und im Endlichen gelegenen Punktmengen des R_n die Eigenschaft, daß jede endliche Anzahl jener Mengen einen gemeinsamen Punkt besitzt, so besitzen auch sämtliche Mengen des Systems einen gemeinsamen Punkt.

Der bisher nicht veröffentlichte Beweis von F. Riesz ist — laut einer freundlichen mündlichen Mitteilung — der folgende.

Sei A_0 irgendeine der gegebenen abgeschlossenen Mengen A. Nehmen wir an, der Rieszsche Satz wäre nicht richtig. Dann gibt es zu jedem Punkte a von A_0 eine abgeschlossene Menge A_a des Systems so, daß a in A_a nicht enthalten ist. Wegen der Abgeschlossenheit von A_a besitzt dann a eine (etwa kugelförmige) Umgebung g_a, die keinen Punkt mit A_a gemein hat. Jeder Punkt von A_0 ist in einem dieser g_a enthalten. Wegen der Abgeschlossenheit von A_0 kann man also — laut des Heine-Borelschen Theorems — aus dieser Menge $\{g_a\}$ eine endliche Teilmenge $(g_1, g_2, \dots, g_\nu)$ so auswählen, daß jeder Punkt von A_0 in einem dieser g_i $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ enthalten sei. Entsprechen nun $g_1, g_2, \dots, g_\nu$ den abgeschlossenen Mengen $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ (d. h. g_i hat mit A_i keinen gemeinsamen Punkt für $i = 1, 2, \dots, \nu$), dann können — im Gegensatz zu unserer Voraussetzung — die Mengen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_\nu$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen, da jeder Punkt von A_0 in einem g_i enthalten ist, also außerhalb A_i liegt.

Hiermit ist der Rieszsche Satz, also auch der Helly-Radonsche Satz in voller Allgemeinheit bewiesen.

Wir wollen endlich noch erwähnen, daß während für eine endliche Anzahl konvexer Körper die Voraussetzung der Abgeschlossenheit dieser Körper leicht vermieden werden könnte, bei dem Übergang ins Unendliche nur die Abgeschlossenheit — und nicht die Konvexität — eine Rolle spielt. Für eine unendliche Menge konvexer Körper ist die Voraussetzung der Abgeschlossenheit notwendig, wie man das durch ein sehr einfaches Beispiel zeigen kann.

---

[4]) Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908) 2, S. 21, Satz b der Anmerkung [2]).

(Eingegangen am 20. Juni. 1921.)

Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Herrn Geheimrat F. v. Lindemann zum 12. April 1922.

1. Mitteilung.

Bei inhomogenen linearen Differenzengleichungen besteht die Haupt ufgabe darin, aus den unendlich vielen Lösungen eine ausgezeichnete erauszugreifen und darzustellen.

Nörlund[1]) nimmt im Falle konstanter Koeffizienten als solche aus- ezeichnete Lösung diejenige, welche aus der Differenzengleichung ver- nittelst sukzessiver Approximationen nach einem nahe liegenden Ansatz ewonnen wird. Wenn die so erhaltene Reihe nicht mehr konvergiert, etzt Nörlund an ihre Stelle eine daraus durch Summationsverfahren ge- onnene Lösung. Bedeuten also Nörlunds Untersuchungen insofern inen großen Fortschritt gegenüber allen früheren Ansätzen, als sie *eine* ösung überhaupt auszeichnen, so leiden sie doch daran, daß die ausge- eichnete Lösung nur durch einen formalen Ansatz charakterisiert wird. Dies hat aber zur Folge, daß andere, gleichberechtigte ausgezeichnete ösungen, die bei Differenzengleichungen auftreten, deren Koeffizienten olynome sind, nicht berücksichtigt werden.

Im folgenden soll nun an Hand der Differenzengleichung

$$(ax+b)f(x+1)+(cx+d)f(x)=g(x), \tag{1}$$

n der a, b, c, d gegebene Konstanten, $g(x)$ eine gegebene von Fall zu all verschiedenen Grenzbedingungen unterliegende Funktion ist, eine eue Methode entwickelt werden, welche sich unmittelbar auf beliebige ifferenzengleichungen mit ganzen rationalen Koeffizienten übertragen ßt. Dabei werden die ausgezeichneten Lösungen durch geeignete Grenz- edingungen festgelegt, wobei man je nach Wahl der Randbedingungen

[1]) N. E. Nörlund, Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences nies. Bull. Soc. math. (2) 44 (1920)

zu verschiedenen Lösungen kommt, die unter Umständen nicht durch Summation ineinander übergeführt werden können.

Verschiedene naheliegende Ansätze führen, wie wir sehen werden, zu linearen Hilfsdifferentialgleichungen, deren linke Seiten aus einer von ihnen durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen hervorgehen. Andererseits führen die analytischen Transformationen der unabhängigen Veränderlichen in der Hilfsdifferentialgleichung unter gewissen, die Konvergenz sichernden Einschränkungen auf eine Lösung von (1), die durch eine Grenzbedingung eindeutig festgelegt ist. Auch die Bestimmung einer Lösung von (1), welche verschwindet, wenn x in einer Halbebene in das Unendliche geht, führt auf eine Hilfsdifferentialgleichung, welche mit den obigen nahe verwandt ist, so daß man sieht, daß die ganze Theorie in den einfachsten, im § 2 behandelten Hilfsdifferentialgleichungen in nuce enthalten ist. Bezüglich weiterer allgemeiner Ausführungen vgl. die Schlußbetrachtungen.

§ 1.

Der fundamentale Hilfssatz.

Es seien

$$a(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad b(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \tag{2}$$

für $|z|<q$ regulär und es besitze die Gleichung

$$b(z)=0 \tag{3}$$

nur eine einzige einfache Wurzel z_1 vom absoluten Betrage kleiner als q, wo q eine positive Zahl ist. Genügt dann

$$\varphi_j(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{j\nu} z^\nu \qquad (j=0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

der Differentialgleichung

$$a(z)\varphi_j(z)+b(z)\frac{d\varphi_j(z)}{dz}=z^j, \tag{5}$$

so gilt für die Koeffizienten $\varphi_{j\nu}$ das Rekursionssystem

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}\varphi_{jk}+\sum_{k=1}^{\nu+1} k b_{\nu-k+1}\varphi_{jk}=\varepsilon_{j\nu}, \text{ wo } \varepsilon_{jj}=1,\ \varepsilon_{j\nu}=0 \text{ für } \nu\neq j. \tag{6}$$

Es sei

$$\frac{a(z_1)}{b'(z_1)}=\varrho_1, \tag{7}$$

ϱ_1 keine negative ganze Zahl, C_1 der Schleifenweg von 0 um z_1 nach 0 dann ist

$$8) \quad \varphi_j(z) = e^{-\int_0^z \frac{a(z)}{b(z)}dz}\left[\int_0^z \frac{e^{\int_0^z \frac{a(z)}{b(z)}dz}}{b(z)} z^j dz + \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_1}-1}\int_{C_1} \frac{e^{\int_0^z \frac{a(z)}{b(z)}dz}}{b(z)} z^j dz\right]$$

as einzige Integral von (5), das für $|z| < q$ regulär ist.

Dann gilt[2])

Hilfssatz 1. *Das durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen er linken Seiten von* (6) *entstehende Gleichungssystem*

$$9) \quad \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu-k}\xi_\nu + \sum_{\nu=k-1}^{\infty} k b_{\nu-k+1}\xi_\nu = \eta_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

at, wenn

$$10) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\eta_n|} \leqq q$$

st, ein und nur ein Lösungssystem ξ_ν, für welches

$$11) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\xi_n|} \leqq q$$

nd es ist

$$12) \quad \xi_j = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{j\nu}\eta_\nu.$$

§ 2.

Erster Ansatz einer Lösung.

Wir vermehren in (1) x jeweils um 1. Diesen distributiven Prozeß bezeichnen wir mit E, so daß

$$13) \quad E(f(x)) = f(x+1), \quad E^\nu(f(x)) = f(x+\nu) \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

wird. Man erhält dann aus (1) das Gleichungssystem

$$14) \quad (cx+d+kc)f(x+k) + (ax+b+ka)f(x+k+1) = g(x+k);$$
$$\text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

das in (9) übergeht, wenn man

$$15) \quad f(x+k) = \xi_k, \quad g(x+k) = \eta_k, \quad a_0 = cx+d, \quad a_1 = ax+b,$$
$$a_2 = a_3 = \ldots = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = c, \quad b_2 = a, \quad b_3 = b_4 = \ldots = 0$$

setzt. Dann geht (5) über in

$$16) \quad (cx+d+(ax+b)z)\varphi_j(z) + z(c+az)\frac{d\varphi_j(z)}{dz} = z^j.$$

---

[2]) Der Nachweis dieses Hilfssatzes bildet den wesentlichen Inhalt des Kapitel I meiner Arbeit, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. (1. Mitteilung.) Math. Ann. 82 (1920), S. 1–39.

Hier ist $z_1 = 0$ und wir müssen

$$q_1 < \left|\frac{c}{a}\right| \tag{17}$$

wählen, damit (16) außer z_1 keine singuläre Stelle mehr besitzt. Es ist speziell

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{cx+d} \frac{ax+b}{(cx+d)(cx+d+c)} z + \frac{(ax+b)(ax+b+a)}{(cx+d)(cx+d+c)(cx+d+2c)} z^2 - \tag{18}$$

und diese Reihe konvergiert für

$$|z| < \left|\frac{c}{a}\right|. \tag{19}$$

Ist $\frac{cx+d}{c}$ nicht null oder eine negative ganze Zahl, so ist $\varphi_0(z)$ die einzige für $z = 0$ reguläre Lösung von (16) mit $j = 0$; allgemein erhält man für das an der Stelle $z = 0$ reguläre Integral $\varphi_j(x, z)$, wo die Abhängigkeit von x durch die Schreibweise hervorgehoben ist,

$$\varphi_j(x, z) = z^j \varphi_0(x + j, z). \tag{20}$$

Es wird also nach dem Hilfssatz des § 1

$$\xi_j = \frac{1}{cx+d+jc} g(x+j) \frac{ax+b+ja}{(cx+d+jc)(cx+d+(j+1)c)} g(x+j+1) + \ldots, \tag{21}$$

also

$$f(x) = \xi_0 = \frac{g(x)}{cx+d} - \frac{ax+b}{(cx+d)(cx+d+c)} g(x+1) \tag{22}$$
$$+ \frac{(ax+b)(ax+b+a)}{(cx+d)(cx+d+c)(cx+d+2c)} g(x+2) - \ldots$$

Da nach (21) ξ_{j+1} aus ξ_j entsteht, indem man x durch $x+1$ ersetzt, ist tatsächlich $\xi_j = f(x+j)$, so daß man entsprechend Hilfssatz (1) enthält:

Satz 1. Ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g(x+n)|} < \left|\frac{c}{a}\right|, \tag{23}$$

so hat die Differenzengleichung (1) *die durch* (22) *dargestellte Lösung als einzige, für welche*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f(x+n)|} < \left|\frac{c}{a}\right| \tag{24}$$

ist.

(22) entspricht der von Nörlund eingeführten Hauptlösung.

§ 3.

Zweiter Ansatz einer Lösung.

Es liegt nahe, auf (1) statt des E-Prozesses den Δ-Prozeß oder allgemeiner den Δ_{c_0}-Prozeß anzuwenden, wo

$$\Delta_{c_0}(f(x)) = f(x+1) - c_0 f(x) \tag{25}$$

st. $\Delta_{c_0}^n(f(x))$ entsteht durch n-malige Anwendung des Δ_{c_0}-Prozesses auf $f(x)$. (1) geht dann über in

$$(cx+d+c_0(ax+b))f(x)+(ax+b)\Delta_{c_0}(f(x))=g(x). \tag{26}$$

Da nun

$$\Delta_{c_0}(xf(x))=(x+1)\Delta_{c_0}(f(x))+c_0 f(x) \tag{27}$$

st, so erhält man aus (26) durch wiederholte Anwendung von Δ_{c_0} das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&k(c+ac_0)c_0\Delta_{c_0}^{k-1}(f(x))\\&+[cx+d+c_0(ax+b)+k(c+2ac_0)]\Delta_{c_0}^k(f(x))\\&+(ax+b+ak)\Delta_{c_0}^{k+1}(f(x))=\Delta_{c_0}^k(g(x))\text{ für }k=0,1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{28}$$

das in (9) übergeht, wenn man

$$\begin{gathered}\Delta_{c_0}^k(f(x))=\xi_k,\quad \Delta_{c_0}^k(g(x))=\eta_k,\quad a_0=cx+d+c_0(ax+b),\\ a_1=ax+b,\quad a_2=a_3=\ldots=0,\quad b_0=(c+ac_0)c_0,\\ b_1=c+2ac_0,\quad b_2=a\end{gathered} \tag{29}$$

setzt. In (5) schreiben wir dann zur Unterscheidung von oben u statt z und $\psi_j(z)$ oder auch $\psi_j(x,z)$ statt $\varphi_j(z)$, dann erhält man

$$\begin{aligned}&(cx+d+c_0(ax+b)+(ax+b)u)\psi_j(u)\\&+(u+c_0)(au+c+ac_0)\frac{d\psi_j(u)}{du}=u^j.\end{aligned} \tag{30}$$

Diese Differentialgleichung ist so zu integrieren, daß das Integral an der absolut kleinsten singulären Stelle u_1 regulär ist. Es kann jetzt aber je nach der Wahl von c_0 entweder $-c_0$ oder $\frac{-c-ac_0}{a}$ dieses u_1 sein. Die andere singuläre Stelle nennen wir u_2. Dann muß jetzt q_2 so gewählt werden, daß

$$|u_1|<q_2<|u_2|. \tag{31}$$

Setzen wir

$$\psi_j(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{j\nu}(x)u^\nu, \tag{31}$$

so erhält man

Satz 2. *Ist*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n(g(x))|}<q_2, \tag{33}$$

so gibt es eine und nur eine Lösung $f(x)$ und zwar

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{c\nu}(x)\Delta_{c_0}^\nu(g(x)), \tag{34}$$

für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n(f(x))|} < q_2, \tag{35}$$

sofern noch bewiesen ist, daß

$$\Delta_{c_0}\xi_k = \xi_{k+1}, \tag{36}$$

also

$$\Delta_{c_0}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x))\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k+1,\nu}(x)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x)) \tag{37}$$

ist.

Um dieses zu beweisen, schicken wir einen Hilfssatz voraus, nämlich

Hilfssatz 2. Aus (33) folgt

$$\overline{\lim_{n\to 0}} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n(g(x+1))|} < q_2. \tag{38}$$

In der Tat ist, wenn n groß genug ist,

$$|\Delta_{c_0}^n(g(x))| < q_2^n; \quad |\Delta_{c_0}^{n+1}(g(x))| < q_2^{n+1}, \tag{39}$$

aber

$$\Delta_{c_0}^n(g(x+1)) - c_0\,\Delta_{c_0}^n(g(x)) = \Delta_{c_0}^{n+1}(g(x)), \tag{40}$$

also

$$|\Delta_{c_0}^n(g(x+1))| < q_2^n(q_2 + |c_0|) \tag{41}$$

woraus (38) folgt. Wir können daher

$$\begin{aligned}\Delta_{c_0}\xi_k &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x+1)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x+1)) - c_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x+1)\,\Delta_{c_0}^{\nu+1}(g(x)) + c_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x+1)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x)) \\ &\qquad - c_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{k\nu}(x)\,\Delta_{c_0}^{\nu}(g(x))\end{aligned} \tag{42}$$

bilden und es ist (37) bewiesen, wenn gezeigt ist, daß

$$\Psi_k(u) = (u+c_0)\,\psi_k(x+1,u) - c_0\,\psi_k(x,u) = \psi_{k+1}(x,u) \tag{43}$$

ist. Es ist aber nach (30)

$$\begin{aligned}&[cx+d+c_0(ax+b)+(ax+b)u](u+c_0)\,\psi_k(x+1,u) \\ &+(u+c_0)(au+c+ac_0)\frac{d}{du}((u+c_0)\,\psi_k(x+1,u)) = u^k(u+c_0)\end{aligned} \tag{44}$$

also

$$\begin{aligned}&[cx+d+c_0(ax+b)+(ax+b)u]\,\Psi_k(u) \\ &+(u+c_0)(au+c+ac_0)\frac{d}{du}\Psi_k(u) = u^{k+1},\end{aligned} \tag{45}$$

nd es sind daher $\Psi_k(u)$ und $\psi_{k+1}(u)$ als die in u_1 regulären Integrale on (45) identisch.

§ 4.

Dritter Ansatz.

Nehmen wir an, daß wir $f(x+1)$ in die Taylorsche Reihe nach otenzen von 1 entwickeln dürfen, so geht (1) in die Differentialgleichung nendlich hoher Ordnung

$$(46) \qquad ((a+c)x+b+d)f(x)+(ax+b)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}=g(x)$$

ber. Indem man (46) beliebig oft differenziert, erhält man ein Gleichungs-ystem, das den Hilfsdifferentialgleichungen

$$(47) \qquad [x(ae^v+c)+be^v+d]\,\chi_j(v)+(ae^v+c)\frac{d\chi_j(v)}{dv}=v^j$$

ugeordnet ist[8]).

Sei

$$(48) \qquad v_1=\ln\left(\frac{-c}{a}\right)$$

ie absolut kleinste singuläre Stelle von (47), v_2 die zweitkleinste, so ählen wir q_3 so, daß

$$(49) \qquad |v_1|<q_3<|v_2|.$$

t dann, wenn $-\frac{ad-bc}{ca}$ keine negative ganze Zahl ist,

$$(50) \qquad \chi_j(v)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\chi_{j\nu}(x)\,v^\nu$$

as einzige für v_1 reguläre Integral von (47), so gilt

Satz 3. *Ist*

$$(51) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g^{(n)}(x)|}<q_3,$$

gibt es, wenn $-\frac{ad-bc}{ca}$ *keine negative ganze Zahl ist, eine und nur ne Lösung*

$$(52) \qquad f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\chi_{0\nu}(x)\,g^{(\nu)}(x),$$

ir welche

$$(53) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}<q_3$$

t.

Man erhält also in diesem Falle eine ganze transzendente Lösung.

[8]) Vgl. l. c. Math. Ann. 82, Kap. I.

Zusatz. Bezeichnen wir den Differentiationsprozeß nach x mit D, sei ferner d_0 eine Konstante, dann können wir (1) in der symbolischen Form

$$(54) \qquad (ax+b)e^{d_0}e^{D-d_0}(f(x))+(cx+d)f(x)=g(x)$$

schreiben, wo e^{D-d_0} nach Potenzen von $D-d_0$ entwickelt zu denken ist und $D^\nu(f(x))=\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$ ist. Wendet man auf (54) den Prozeß $D-d_0$ an, so erhält man ein Gleichungssystem, das zu den Hilfsdifferentialgleichungen

$$(55) \qquad [(ax+b)e^{t+d_0}+cx+d]\,\Pi_j(t)+(ae^{t+d_0}+c)\frac{d\,\Pi_j(t)}{dt}=t^j$$

gehört. Sei, wenn $\overline{\ln}\left(\frac{-c}{a}\right)$ richtig gewählt ist,

$$(56) \qquad t_1=-d_0+\overline{\ln\left(\frac{-c}{a}\right)}$$

die absolut kleinste singuläre Stelle von (55), t_2 die absolut zweitkleinste und

$$(57) \qquad |t_1|<q_4<|t_2|.$$

Dann folgt:

Ist

$$(58) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(D-d_0)^n(g(x))|}<q_4,$$

so hat (1) eine und nur eine Lösung $f(x)$, für welche

$$(59) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(D-d_0)^n(f(x))|}<q_4$$

ist.

§ 5.

Vierter Ansatz[4]).

Es bedeute $\Re(x)$ reellen Teil von x, $\mathfrak{D}_\varkappa$ die Gesamtheit der Funktionen, welche in der Halbebene $\Re(x)>\varkappa$ regulär sind und sich daselbst für große $|x|$ in der Form

$$(60) \qquad \frac{\lambda}{x}+\frac{\mu(x)}{x^2}$$

darstellen lassen, wo $\varkappa$ eine reelle, λ irgendeine Konstante, $|\mu(x)|$ beschränkt ist. Ist $k>\varkappa$ und suchen wir, wenn $g(x)$ zu $\mathfrak{D}_\varkappa$ gehört, eine Lösung $f(x)$ aus $\mathfrak{D}_\varkappa$, so können wir (1) überführen in

$$(61) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(z)\left(\frac{ax+b}{x+1-z}+\frac{cx+d}{x-z}\right)dz=g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}\gamma(u)\,du,$$

[4]) Vgl. zu diesem Paragraph E. Hilb, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, erscheint in Math. Ann.

$$\gamma(u) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{ux} g(z)\,dz, \qquad \Re(x) > k. \tag{62}$$

Nun ist, wenn $\Re(x) > \Re(z)$,

$$\frac{ax+b}{x+1-z} + \frac{cx+d}{x-z} = \int_0^\infty e^{-u(x-z)}\left[(ax+b)e^{-u} + cx + d\right]du, \tag{63}$$

daß also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^x du\, e^{-ux}\left[(ax+b)e^{-u} + cx + d\right]\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(z)\,e^{uz}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}\gamma(u)\,du. \tag{64}$$

Setzt man

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(z)\,e^{uz}\,dz = F(u), \tag{65}$$

so erhält man, wenn

$$F(0) = 0 \tag{66}$$

ist, durch partielle Integration, sofern x groß genug gewählt ist,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty du\, e^{-ux}\left[(ae^{-u}+c)F'(u) + ((b-a)e^{-u}+d)F(u)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}\gamma(u)\,du, \tag{67}$$

also

$$(ae^{-u}+c)F'(u) + \left[(b-a)e^{-u}+d\right]F(u) = \gamma(u). \tag{68}$$

Liegt auf der reellen Achse zwischen 0 und ∞ kein singulärer Punkt der Differentialgleichung (68), so ist $F(u)$ durch (66) und (68) bestimmt und

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-ux} F(u)\,du \tag{69}$$

die gesuchte Lösung. Man kann natürlich ebenso eine von einer irgendwie anders gerichteten Geraden begrenzte Halbebene behandeln.

Setzt man

$$y = e^{xv}\chi_j(v), \tag{70}$$

so geht die linke Seite von (47) über in

$$e^{-xv}\left[(ae^{v}+c)\frac{dy}{dv} + (be^{v}+d)y\right]. \tag{71}$$

Die eckige Klammer in (71) ist aber, wenn man v durch $-u$ ersetzt, adjungiert zur linken Seite von (68).

§ 6.

Vergleich der gewonnenen Resultate.

Die ersten drei Ansätze lieferten uns Lösungen von (1) in den drei Formen:

$$(72) \qquad f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x)\,E^\nu(g(x)), \qquad f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(x)\,\Delta_{c_0}^\nu(g(x)),$$

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\chi_\nu(x)\,D^\nu(g(x)),$$

wobei

$$(73) \qquad E(g(x))=g(x+1), \quad \Delta_{c_0}(g(x))=g(x+1)-c_0\,g(x), \quad D(g(x))=g'(x)$$

ist. Die Exponenten ν bedeuten, daß die betreffende Operation ν-mal anzuwenden ist. Aus (73) folgt

$$(74) \qquad \Delta_{c_0}(g(x))=(E-c_0)(g(x)),$$

$$(75) \qquad E(g(x))=e^D(g(x))$$

in unmittelbar verständlicher symbolischer Darstellung. Andererseits gehen die linken Seiten der Differentialgleichungen (30) und (47) aus denen der Gleichungen (16) hervor, indem man

$$(76) \qquad u=z-c_0,$$

$$(77) \qquad z=e^v$$

setzt. Es entsprechen sich also die Transformationen (74) und (76), (75) und (77). *Doch liefert der Ansatz des* § 2 *eine meromorphe Lösung von* (1), *der des* § 4 *eine ganze transzendente Lösung.* Dieses hängt damit zusammen, daß die absolut kleinste singuläre Stelle von (16), also $z=0$ nicht in die absolut kleinste singuläre Stelle von (47) übergeht. Andererseits geht die absolut zweitkleinste singuläre Stelle von (16) bei der Transformation in unendlich viele einfache singuläre Stellen von (47) über, von denen man jede einzelne, wie aus dem Zusatz von § 4 hervorgeht, durch eine neue Transformation zur absolut kleinsten gemacht werden kann.

Es soll nun im folgenden Paragraph untersucht werden, ob der Zusammenhang zwischen (74) und (76) bzw. (75) und (77) ein zufälliger ist oder ob sich beweisen läßt, daß das Rekursionssystem für die Koeffizienten der Integrale der Hilfsdifferentialgleichungen nach Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen zu dem Gleichungssystem, das aus (1) durch wiederholte Anwendung der der neuen Veränderlichen entsprechenden distributiven Operation entsteht, in invarianter Beziehung steht. Der Zusammenhang der Differentialgleichungen (68) und (47) wurde schon in

5 erwähnt; in klares Licht tritt er jedoch erst durch Einführung der ummationstheorie, wie ich in einem Spezialfalle [4]) gezeigt habe und in iner der folgenden Mitteilungen durchführen werde.

§ 7.

Transformation der Differentialgleichungen (16).

Wir setzen

78) $$z=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu; \qquad (z-c_0)^j=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{j\nu}\zeta^{j+\nu};$$

79) $$\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j(z-c_0)^{j+1}; \qquad \zeta^\nu=\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{\nu j}(z-c_0)^{j+\nu};$$

80) $$z\frac{d\zeta}{dz}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\gamma_j((z-c_0)^{j+1}+c_0(z-c_0)^j)=\sum_{\mu=0}^{\infty}d_\mu\zeta^\mu.$$

Die Reihen (78) und die letzte Reihe in (80) sollen für

81) $$|\zeta|\leqq \mathsf{P}$$

bsolut konvergieren, die Reihen (79) für

82) $$|z-c_0|\leqq R.$$

Es sei ferner Z eine reelle positive Größe kleiner als R, für welche

83) $$\sum_{j=0}^{\infty}|\gamma_j|Z^{j+1}<\mathsf{P},$$

lso auch

84) $$\sum_{j=0}^{\infty}|\gamma_{\nu j}|Z^{j+\nu}<\mathsf{P}^\nu.$$

Schließlich sei Z eine reelle positive Größe kleiner als P, für welche

85) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|Z^\nu<Z,$$

lso auch

86) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}|c_{j\nu}|Z^{j+\nu}<Z^j$$

t. Wenn daher

87) $$|\zeta|<Z$$

t, folgt

88) $$|z-c_0|<Z<R,$$

lso die absolute Konvergenz der Reihen (78), (79) und (80).

Wir führen nun in der linken Seite von (16) ζ als unabhängige Veränderliche ein und betrachten die Differentialgleichung

$$(89)\qquad \left[cx+d+(ax+b)\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^\nu\right]\Theta_j(\zeta)$$
$$+\left(c+a\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^\nu\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}d_\mu\zeta^\mu\frac{d\Theta_j(\zeta)}{d\zeta}=\zeta^j.$$

Setzt man

$$(90)\qquad \Theta_j(\zeta)=\Theta_j(\zeta,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Theta_{j\nu}(x)\zeta^\nu,$$

so erhält man durch Gleichsetzen der Koeffizienten von ζ^ν analog zu (6)

$$(91)\qquad (cx+d)\Theta_{j\nu}+(ax+b)\sum_{\varrho=0}^{\nu}c_{\nu-\varrho}\Theta_{j\varrho}+c\sum_{\varrho=1}^{\nu+1}\Theta_{j\varrho}d_{\nu+1-\varrho}$$
$$+a\sum_{\varrho=1}^{\nu+1}\sum_{\sigma=1}^{\nu+1-\varrho}\varrho\,\Theta_{j\varrho}c_\sigma d_{\nu+1-\varrho-\sigma}=e_{j\nu}.$$

Das Integral soll nun so bestimmt werden, daß es als einziges an der absolut kleinsten singulären Stelle ζ_1 von (89), welche wir als einfache annehmen wollen, entsprechend den Voraussetzungen des § 1, regulär ist. Wir machen dabei die Annahme, daß

$$(92)\qquad |\zeta_1|<Z,$$

denken uns andererseits Z so klein gewählt, daß der absolute Betrag aller anderen singulären Stellen von (89) größer als Z ist, so daß also die Reihe in (90) für $\zeta=Z$ absolut konvergiert.

§ 8.

Eigenschaften der distributiven Operation Λ.

Es sei

$$(93)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n(g(x))|}<Z.$$

Dann definieren wir entsprechend (79)

$$(94)\qquad \Lambda(g(x))=\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j\Delta_{c_0}^{j+1}g(x).$$

Nach Hilfssatz 2 existiert auch $\Lambda(g(x+1))$ und also auch

$$(95)\qquad \Delta_{c_0}[\Lambda(g(x))]=\Lambda[\Delta_{c_0}(g(x))]$$

und

$$(96)\qquad \Delta_{c_0}^k[\Lambda(g(x))]=\Lambda[\Delta_{c_0}^k(g(x))].$$

Wegen (79), (83) und (93) ist aber für genügend große k

97) $$|\Lambda[\Delta_{c_0}^k(g(x))]| < \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| Z^{j+k+1} < Z^k P,$$

also wegen (79)

98) $$\Lambda^2(g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta_{c_0}^{j+k+1}(g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{2j} \Delta_{c_0}^{j+2}(g(x))$$

und allgemein

99) $$\Lambda^r(g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{rj} \Delta_{c_0}^{j+r}(g(x)).$$

Sei nun

100) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Lambda^n(g(x))|} < Z,$$

so konvergieren die in

101) $$\sum_{r=1}^{\infty} c_r \Lambda^n(g(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{rj} \Delta_{c_0}^{j+r}(g(x))$$

auftretenden Reihen wegen (93), (84) und (81) alle absolut; es folgt also durch Umordnung in eine einfache Reihe nach den symbolischen Potenzen von Δ_{c_0} aus (78) und (79) die Identität

102) $$\sum_{r=1}^{\infty} c_r \Lambda^r(g(x)) = \Delta_{c_0}(g(x)).$$

Ebenso folgt

103) $$\sum_{r=0}^{\infty} c_{jr} \Lambda^{j+r}(g(x)) = \Delta_{c_0}^j(g(x)),$$

und schließlich entsprechend (80)

104) $$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\gamma_j [\Delta_{c_0}^{j+1}(g(x)) + c_0 \Delta_{c_0}^j(g(x))] = \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu \Lambda^\mu(g(x)).$$

Nach den Formeln (94), (99), (102), (103) und (104) bestehen also zwischen Δ_{c_0} und Λ dieselben Relationen, wie zwischen $z - c_0$ und ζ.

Wir leiten jetzt einige weitere Eigenschaften von $\Lambda(g(x))$ und $\Delta_{c_0}(g(x))$ ab.

Genau wie (96) ergibt sich

105) $$\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))] = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{nj} \Delta_{c_0}^{n+j+k}(g(x)),$$

also wegen (93) und (84), sofern $n+k$ groß genug ist,

106) $$|\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))]| < Z^k P^n,$$

so daß speziell

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))]|} < Z. \tag{107}$$

ist. Da ferner wegen (100)

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\varrho]{|\Lambda^\varrho[\Lambda^n(g(x))]|} < Z \tag{108}$$

ist, so hat $\Lambda^n(g(x))$ die in (93) und (100) für $g(x)$ vorausgesetzten Eigenschaften. Es ist daher entsprechend (103)

$$\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))] = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{k\nu} \Lambda^{k+\nu+n}(g(x)), \tag{109}$$

also, wenn $k+n$ genügend groß ist, nach (86)

$$|\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))]| < Z^k Z^n, \tag{110}$$

wodurch eine schärfere Abschätzung wie in (106) gewonnen ist. Es ist folglich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^k[\Lambda^n(g(x))]|} < Z. \tag{111}$$

Andererseits ist für $k=1$ bei genügend großem n nach (110)

$$|\Delta_{c_0}[\Lambda^n(g(x))]| < Z Z^n, \tag{112}$$

daher

$$|\Lambda^n(g(x+1))| < |c_0|\,|\Lambda^n(g(x))| + Z Z^n < Z^n(|c_0| + Z), \tag{113}$$

also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Lambda^n(g(x+1))|} < Z. \tag{114}$$

Schließlich gilt

Hilfssatz 3. *Konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |h_\nu|\, P^\nu, \tag{115}$$

so ist

$$\Lambda\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu \Lambda^\nu(g(x))\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu \Lambda^{\nu+1}(g(x)). \tag{116}$$

Wenn also (115) konvergiert, darf man auf der linken Seite von (116) die Reihenfolge von Λ-Prozeß und Summation vertauschen.

Es genügt, wenn wir (116) beweisen, wenn ν von N bis ∞ geht, wo N groß genug ist. Nun ist

117) $$\left|\Lambda\left(\sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \Lambda^\nu(g(x))\right)\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta_{c_0}^{j+1}\left\{\sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\nu\varkappa} \Delta_{c_0}^{\varkappa+\nu}(g(x))\right\}\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\nu\varkappa} \Delta_{c_0}^{\varkappa+\nu+j+1}(g(x))\right|$$

$$< \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| \sum_{\nu=N}^{\infty} |h_\nu| \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |\gamma_{\nu\varkappa}| Z^{\varkappa+\nu+j+1} < \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| Z^{j+1} \sum_{\nu=N}^{\infty} |h_\nu| \mathsf{P}^\nu.$$

Wegen der absoluten Konvergenz ist also

118) $$\Lambda\left(\sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \Lambda^\nu(g(x))\right) = \sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\nu\varkappa} \Delta_{c_0}^{\varkappa+\nu+j+1}(g(x))$$

$$= \sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\nu+1\,\varkappa} \Delta_{c_0}^{\varkappa+\nu+1}(g(x)) = \sum_{\nu=N}^{\infty} h_\nu \Lambda^{\nu+1}(g(x)).$$

§ 9.

Einführung der distributiven Operation Λ in (1).

Durch Einführung von Λ in (1) geht dieses unter der vorläufigen nnahme

119) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n(f(x))|} < Z,$$

120) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Lambda^n(f(x))|} < Z$$

ber in

121) $$(ax+b)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \Lambda^\nu(f(x)) + (cx+d) f(x) = g(x).$$

Um hierauf den Λ-Prozeß anwenden zu können, berechnen wir $(x f(x))$. Es ist

122) $$\Delta_{c_0}(x f(x)) = (x+1)\Delta_{c_0}(f(x)) + c_0 f(x);$$
$$\Delta_{c_0}^j(x f(x)) = (x+j)\Delta_{c_0}^j(f(x)) + j c_0 \Delta_{c_0}^{j-1}(f(x)),$$

so

123) $$\Lambda(x f(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta_{c_0}^{j+1}(x f(x))$$

$$= x\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta_{c_0}^{j+1}(f(x)) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\gamma_j [\Delta_{c_0}^{j+1}(f(x)) + c_0 \Delta_{c_0}^j(f(x))],$$

der nach (104)

124) $$\Lambda(x f(x)) = x\Lambda(f(x)) + \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu \Lambda^\mu(f(x)).$$

Wenden wir unter Benützung des Hilfssatzes 3 den Λ-Prozeß wiederholt auf (121) an, so erhält man das Gleichungssystem

$$(125)\quad (ax+b)\sum_{\nu=k}^{\infty} c_{\nu-k}\Lambda^{\nu}(f(x)) + ka\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\nu-k+1} c_{\sigma}d_{\nu-k+1-\sigma}\Lambda^{\nu}(f(x))$$

$$+(cx+d)\Lambda^{k}(f(x)) + kc\sum_{\nu=k-1}^{\infty} d_{\nu-k+1}\Lambda^{\nu}(f(x)) = \Lambda^{k}(g(x))$$

für $k=0, 1, 2, \ldots$.

Setzt man also

$$\Lambda^{\nu}(f(x)) = \xi_{\nu}(x), \quad \Lambda^{k}(g(x)) = \eta_{k}, \quad a_0 = (ax+b)c_0 + cx + d$$

$$(126)\qquad a_{\nu} = (ax+b)c_{\nu} \text{ für } \nu > 0, \qquad b_{\nu} = a\sum_{\sigma=0}^{\nu} c_{\sigma}d_{\nu-\sigma} + cd_{\nu},$$

so entsprechen sich die Gleichungssysteme (9) und (125), die Differentialgleichungen (5) und (89) die Größen q und Z. Es folgt daraus:

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des* § 7 *hat, wenn für* $g(x)$ (93) *und* (100) *gilt, die Differenzengleichung* (1) *eine und nur eine Lösung* $f(x)$, *für welche* (119) *und* (120) *erfüllt ist,*

wenn noch gezeigt ist, daß

$$(127)\qquad \Lambda^{\nu}(\xi_j(x)) = \xi_{j+1}(x)$$

und daß für $f(x)$ (119) gilt.

§ 10.

Beweis der Gleichung (127).

Entsprechend (12) und (90) ist

$$(128)\qquad \xi_j(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Theta_{j\nu}(x)\Lambda^{\nu}(g(x)).$$

Wegen (113) existiert auch $\xi_j(x+1)$ und allgemein $\Delta_{c_0}^{\varkappa}(\xi_j(x))$ und es ist

$$(129)\quad \Delta_{c_0}^{\varkappa}(\xi_j(x)) = \sum_{\varrho=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\varrho}(-c_0)^{\varkappa-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Theta_{j\nu}(x+\varrho)(\Delta_{c_0}+c_0)^{\varrho}\{\Lambda^{\nu}(g(x))\}$$

Wegen (109) und (110) können wir die rechte Seite von (129) in eine absolut konvergente Reihe nach den symbolischen Potenzen von $\Lambda(g(x))$ ordnen und daher schreiben

$$(130)\qquad \Delta_{c_0}^{\varkappa}(\xi_j(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{j\varkappa\nu}(x)\Lambda^{\nu}(g(x)).$$

Andererseits setzen wir

$$131)\quad H_{j\varkappa}(x,\zeta)=\sum_{\varrho=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\varrho}(-c_0)^{\varkappa-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Theta_{j\nu}(x+\varrho)\,(z-c_0+c_0)^{\varrho}\,\zeta^{\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}h_{j\varkappa\nu}(x)\,\zeta^{\nu}.$$

Nun genügt aber nach (89)

$$132)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\Theta_{j\nu}(x+\varrho)\,\zeta^{\nu}=\Theta_j(\zeta,x+\varrho)$$

er Differentialgleichung

$$133)\quad \Big[cx+d+(ax+b)\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^{\nu}\Big]z^{\varrho}\,\Theta_j(\zeta,x+\varrho)$$

$$+\Big(c+a\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^{\nu}\Big)\frac{z\,d\zeta}{dz}\frac{d}{d\zeta}(\Theta_j(\zeta,x+\varrho)z^{\varrho})=\zeta^{j}z^{\varrho};$$

ist also

$$134)\quad \Big[cx+d+(ax+b)\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^{\nu}\Big]H_{j\varkappa}(x,\zeta)$$

$$+\Big(c+a\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\zeta^{\nu}\Big)\sum_{\mu=0}^{\infty}d_\mu\zeta^{\mu}\frac{d}{d\zeta}H_{j\varkappa}(x,\zeta)=\zeta^{j}(z-c_0)^{\varkappa}$$

nd man erhält $H_{j\varkappa}(x,\zeta)$ als das in ζ_1 reguläre Integral in einer (8) ntsprechenden Form, wobei das Schleifenintegral um ζ_1 zu nehmen ist. a aber nach (88) aus

$$135)\quad |\zeta|\leqq Z$$

$$136)\quad |z-c_0|\leqq Z$$

lgt, so ergibt sich[5]) die Existenz einer von $\varkappa$ unabhängigen Zahl M, daß, sobald (135) erfüllt ist,

$$137)\quad |H_{j\varkappa}(x,\zeta)|<MZ^{\varkappa},$$

lso nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz

$$138)\quad |h_{j\varkappa\nu}(x)|<\frac{MZ^{\varkappa}}{Z^{\nu}}$$

t. Da nun, wenn ε geeignet als positive Zahl gewählt wird, wegen 100) mit Ausnahme nur endlich vieler ν

$$139)\quad |\Lambda^{\nu}(g(x))|\leqq(Z-\varepsilon)^{\nu}$$

[5]) Vgl. Hilb, l. c. Math. Ann. 82, S. 11.

ist, so gibt es eine von $\varkappa$ unabhängige Zahl M_1, so daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |h_{j\varkappa\nu}(x)\Lambda^{\nu}(g(x))| < M_1 Z^{\varkappa}. \tag{140}$$

Es konvergiert daher die Reihe

$$\Lambda(\xi_j(x)) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\varkappa} \Delta_{c_0}^{\varkappa}(\xi_j(x)) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{j\varkappa\nu}(x)\Lambda^{\nu}(g(x)) \tag{141}$$

absolut und darf daher nach den symbolischen Potenzen von $\Lambda(g(x))$ geordnet werden, wodurch man

$$\Lambda(\xi_j(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \vartheta_{j\nu}(x)\Lambda^{\nu}(g(x)) \tag{142}$$

erhält. Andererseits ist

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{j\varkappa\nu}(x)\zeta^{\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \gamma_{\varkappa} H_{j\varkappa}(x,\zeta) = \vartheta_j(x,\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \vartheta_{j\nu}(x)\zeta^{\nu} \tag{143}$$

und genügt wegen (134) der Differentialgleichung

$$\Big[(cx+d)+(ax+b)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}\zeta^{\nu}\Big]\vartheta_j(x,\zeta) \tag{144}$$

$$+\Big(c+a\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}\zeta^{\nu}\Big)\sum_{\mu=0}^{\infty} d_{\mu}\zeta^{\mu}\frac{d}{d\zeta}\vartheta_j(x,\zeta) = \zeta^{j+1}.$$

Da aber $\vartheta_j(x,\zeta)$ in ζ_1 regulär ist, folgt

$$\vartheta_j(x,\zeta) = \Theta_{j+1}(x,\zeta), \tag{145}$$

also

$$\Lambda(\xi_j(x)) = \xi_{j+1}(x) \tag{146}$$

oder

$$\xi_j = \Lambda^j(f(x)). \tag{147}$$

Aus Hilfssatz 1 folgt daher jetzt (120), andererseits, indem wir in (130) $j=0$ setzen, aus (140) schließlich (119).

§ 11.

Schlußbemerkungen.

Der im Zusatz von § 4 angedeutete Ansatz ergibt sich einfacher durch Übergang von $D(f(x))$ zu $(D-d_0)(f(x))$ als durch Übergang von $E(f(x))$ aus. Nun sind aber gerade die Differentialgleichungen (47) und (55) besonders interessant, da sie unendlich viele singuläre Stellen haben, von denen jede durch geeignete Transformation zur absolut kleinsten ge-

acht werden kann. Andererseits wurden in den Überlegungen von § 7 s § 10 nur allgemeine Eigenschaften der Δ_{c_0}-Operation benutzt, die sich allgemeiner Form so fassen lassen, daß sie für umfassende Gruppen stributiver Operationen gelten. Die Weiterentwicklung der Theorie ird daher zunächst eine allgemeine Transformationstheorie der distri-utiven Operationen in Anschluß an die mit diesen verknüpften linearen ifferentialgleichungen[6]) bringen müssen. Gerade diese Transformations-eorie scheint mir für die verschiedensten Probleme von fundamentaler edeutung. Andererseits wird auch speziell für die Differenzengleichungen e von Nörlund angeschnittene Summationstheorie in Verbindung[7]) mit en vorstehenden Untersuchungen gebracht werden müssen.

Wenig oder nichts Neues erwarte ich dagegen von der unmittelbar urchführbaren Übertragung der hier gegebenen Entwicklungen auf be-ebige Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten[8]), wobei höchstens as Herausarbeiten der pathologischen Fälle von Interesse sein könnte.

---

[6]) Im Falle der gewöhnlichen linearen Integralgleichungen sind die Hilfsdiffe-ntialgleichungen von nullter Ordnung, nämlich $\varphi_j(z)(1-z)=z^j$, woraus für $j=0$ lgt $\varphi_j(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ entsprechend der bekannten Lösung der Integralgleichungen ver-ittelst der Neumannschen Reihen.

[7]) Vgl. hierzu E. Hilb, l. c. [4]).

[8]) Die notwendigen Grundlagen liefern hierfür E. Hilb, Lineare Differential-eichungen unendlich hoher Ordnung. 2. Mitteilung Math. Ann. 84, S. 16–30; 3. Mit-ilung ebenda, S. 33–52. O. Perron, ebenda, S. 31–42. H. v. Koch, Sur les uations différentielles linéaires d'ordre infini. Arkiv för Mat. 15 (1921).

(Eingegangen am 19. Januar 1922.)

Über den gemischten Flächeninhalt zweier ebenen Figuren.

Von

E. Salkowski in Hannover.

Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei parallel zugeordnete ebene Bereiche und konstruiert man zu ihnen die Schar der parallel zugeordneten Figuren $\mathfrak{F}' = F(x, y)$ dadurch, daß man den Abstand entsprechender Randpunkte P_1 und P_2 in einem beliebigen konstanten Verhältnis

$$\frac{P'P_1}{P'P_2} = \frac{y}{x} \qquad (x+y=1) \tag{1}$$

teilt, so läßt sich der Flächeninhalt F' von $\mathfrak{F}'$ als homogene quadratische Funktion von x und y darstellen:

$$F' = F_1 x^2 + 2Mxy + F_2 y^2, \tag{2}$$

deren äußere Koeffizienten F_1, F_2 die Flächeninhalte der gegebenen Figuren $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind, während M eine affine Invariante bedeutet, die von Minkowski[1]) als der *gemischte Flächeninhalt* von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bezeichnet wurde. Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ konvexe Bereiche, so ist die Form F' indefinit, es besteht daher die Beziehung

$$M^2 \geqq F_1 F_2, \tag{3}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ homothetisch sind.

Diese grundlegende Minkowskische Ungleichung (3) hat schon wiederholt die Aufmerksamkeit der Geometer erregt, und dem ursprünglichen Beweise von Minkowski sind von Blaschke[2]), Frobenius[3]) und Liebmann[4]) neue, vereinfachte Beweise an die Seite gestellt worden. Da bei

[1]) Minkowski, Volumen und Oberfläche, Mathematische Annalen 57 (1903) S. 447—495, Gesammelte Abh. 2, 230.

[2]) Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914), S. 210.

[3]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1915, 387.

[4]) Mathematische Zeitschr. 4 (1919), S. 288—294.

n genannten Autoren die metrischen Anwendungen des Minkowskischen tzes im Vordergrunde stehen, wird in ihren Schlußweisen nicht benutzt, ß M eine affine Invariante ist und die ganze Fragestellung der affinen ometrie angehört. Infolgedessen wird auch nirgends eine sehr naheegende, aber bisher anscheinend noch nicht ausdrücklich ausgesprochene ometrische Bedeutung dieser Invariante herangezogen, die geeignet ist, e ganze Fragestellung mit rein elementargeometrischen Hilfsmitteln zu ledigen, sofern man sich auf Vielecke mit endlicher Seitenzahl beschränkt. ir den Grenzübergang spielt dann das *Minkowski-Frobeniussche Kappenieck* eine wichtige Rolle.

1. Geometrische Deutung des gemischten Flächeninhalts. if den Randkurven c_1, c_2 der beiden gegebenen konvexen Flächenstücke und F_2 seien P_1, P_2 zwei entsprechende Punkte, so daß also die ngenten in P_1 und P_2 an die andkurven parallel sind. Konruiert man nun für einen beliegen Nullpunkt O die Summe der adienvektoren $OP_1 + OP_2 = OP$, beschreibt P eine zu c_1 und c_2 rallel zugeordnete Kurve c, die nen ebenfalls konvexen Bereich, n „*Summenbereich* $\mathfrak{F}$", umhließt, der sich bei einer beliebigen Änderung des Punktes O nur rallel verschiebt[5]). Der Flächeninhalt F von $\mathfrak{F}$ ist eine affine Invante, und der gemischte Flächeninhalt M der Bereiche $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ wird rch die Gleichung gegeben

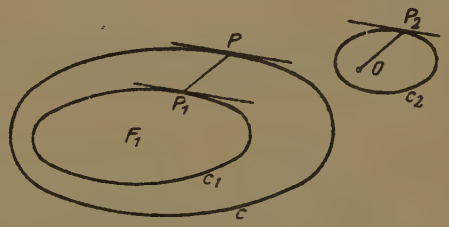

Fig. 1.

$$2M = F - F_1 - F_2 . \qquad (3)$$

Der doppelte gemischte Flächeninhalt zweier ebenen Bereiche ist also eich der Differenz des Flächeninhalts des Summenbereichs und der mme der Flächen der Einzelbereiche.

Daß diese Definition mit der ursprünglichen sachlich übereinstimmt, gibt sich leicht, wenn man in den Formeln (1) und (2) $x = y = \frac{1}{2}$ tzt. Es entsteht dann ein Bereich $\mathfrak{F}'$, der zu $\mathfrak{F}$ homothetisch ist, woi $F = 4F'$ wird.

Die eindeutige Zuordnung der Randpunkte zweier Bereiche hört auf, bald die Randkurve nicht stetig gekrümmt ist. Trotzdem kann man

[5]) Diese und ähnliche elementare Sätze finden sich zum ersten Male ausgesprochen einer kleinen Abhandlung von J. Steiner, Über Lehrsätze, von denen die benten Sätze über parallele Kurven besondere Fälle sind, Journal für Mathematik (1846), S. 75; Werke 2, S. 361–367.

auch in diesem Falle einen Summenbereich konstruieren. Sind z. B. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei geradlinig begrenzte Vielecke mit parallelen Seiten, so entsprechen allen Punkten einer Seite a_1 der Begrenzung c_1 alle Punkte der entsprechenden Seite a_2 auf der Begrenzung c_2. Man kann dann die Seiten a_1 und a_2 sich auf irgendeine Weise punktweise zuordnen, immer aber führt die Addition der Vektoren $OP_1 + OP_2$ auf eine *geradlinige* Begrenzungslinie a des Summenbereichs, und zwar ist die Länge von a gleich der Summe der Längen von a_1 und a_2. Hieraus folgt unmittelbar:

Der Summenbereich zweier parallel zugeordneten n-Ecke $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist ein paralleles n-Eck, bei dem eine jede Seite gleich der Summe der entsprechenden Seiten von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist.

Es ist übrigens leicht, diese Konstruktion des Summenbereiches auf nicht parallel zugeordnete ebene Bereiche auszudehnen, doch wird hiervon in der Folge kein Gebrauch gemacht.

2. Parallel zugeordnete Dreiecke und Parallelogramme. Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ parallel zugeordnete Dreiecke

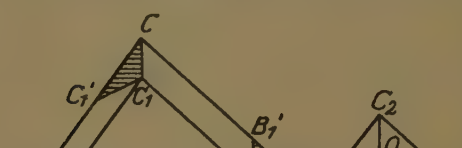

Fig. 2.

$\mathfrak{F}_1 = A_1B_1C_1$, $\mathfrak{F}_2 = A_2B_2C_2$

und nimmt man O etwa im Innern von $A_2B_2C_2$ an, so ergibt sich als Summenbereich ein Dreieck ABC, das $A_1B_1C_1$ in sich schließt und das zu beiden gegebenen Dreiecken homothetisch ist. Zieht man noch

$$A_1A \parallel OA_2, \quad A_1A_1' \parallel OB_2; \quad B_1B \parallel OB_2, \quad B_1B_1' \parallel OC_2;$$
$$C_1C \parallel OC_2, \quad C_1C_1' \parallel OA_2,$$

so erkennt man, daß die drei in der Figur schraffierten Dreiecke A_1AA_1', B_1BB_1', C_1CC_1' sich zu einem zu $A_2B_2C_2$ kongruenten Dreieck zusammensetzen lassen, so daß die drei Parallelogramme über A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 den doppelten gemischten Flächeninhalt von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ausmachen. Läßt man O mit einer Ecke des Dreiecks $A_2B_2C_2$, etwa mit A_2, zusammenfallen, so ergibt sich eine noch einfachere Figur, die man auch folgendermaßen entstanden denken kann: Man legt das Dreieck $A_2B_2C_2$ derart an $A_1B_1C_1$, daß A_2 mit B_1 zusammenfällt, und ergänzt die entstehende Figur durch Verlängerung von A_1C_1 und C_2B_2 zu einem Summendreieck, dann ist das hinzugefügte Ergänzungsparallelogramm

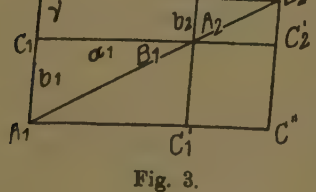

Fig. 3.

$_2C_2C'C_1$ gleich dem doppelten gemischten Flächeninhalt der Dreiecke und $\mathfrak{F}_2$.

Vervollständigt man die entstandene Figur zu einem Parallelogramm $_1C'B_2C''$, dessen Diagonale A_2B_2 ist, und verlängert B_1C_2, C_1B_1 bis m Schnittpunkte C_1' bzw. C_2' mit der Gegenseite, so entsteht die bennte Figur des elementaren Satzes über Ergänzungsparallelogramme, so ß auch

$$C''C_2'B_1C_1' = 2M$$

rd. Bezeichnet man endlich mit $a_1, b_1; a_2, b_2$ und je zwei entsprechende itenpaare und den eingeschlossenen Winkel der Dreiecke $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, wird

$$2F_1 = a_1b_1\sin\gamma, \qquad 2F_2 = a_2b_2\sin\gamma,$$

$$2M_1 = a_1b_2\sin\gamma = a_2b_1\sin\gamma,$$

daß für zwei parallel zugeordnete, also ähnliche Dreiecke

$$M_1^2 = F_1F_2$$

rd.

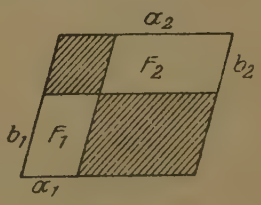

Fig. 4.

Für zwei parallel zugeordnete Parallelogramme mit den Seiten a_1, b_1 und a_2, b_2 ergibt ch durch eine gleichartige Konstruktion, daß M s arithmetische Mittel, $\sqrt{F_1F_2}$ das geometrische ittel derjenigen beiden (in der Figur schraffierten) rallelogramme ist, die den gegebenen parallel geordnet sind und die Seiten a_1, b_2 bzw. a_2, b_1 besitzen. Daraus folgt

$$M^2 \geqq F_1F_2,$$

bei das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn die schraffierten rallelogramme kongruent sind, d. h. wenn

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

er die gegebenen Parallelogramme ähnlich sind. Damit ist die Richgkeit der Minkowskischen Ungleichheit für diesen besonderen Fall chgewiesen. Es war nötig, diesen fast trivialen Fall vorweg zu bendeln, da er sich der im folgenden dargestellten allgemeinen Beweisrung entzieht.

3. Hilfssatz. Für den Beweis der Minkowskischen Ungleichung Falle beliebiger n-Ecke ist folgender Hilfssatz grundlegend:

Zerlegt man zwei parallel zugeordnete Vielecke $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *durch rallele Schnitte* s_1 *und* s_2 *so in zwei Vielecke*

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1' + \mathfrak{F}_1'', \qquad \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2' + \mathfrak{F}_2'',$$

daß die Schnittlinien parallele Seitenpaare treffen, so ist der gemischte Flächeninhalt der entsprechenden Teilvielecke:

$$(5) \qquad M(\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2) = M(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2') + M(\mathfrak{F}_1'', \mathfrak{F}_2'').$$

Bildet man nämlich das Summenvieleck $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}_1'$, $\mathfrak{F}_2'$, so wird dies ein beiden Summanden parallel zugeordnetes Vieleck werden, dessen eine Seite gleich der Summe der Schnittlinien $s_1 + s_2$ wird. In derselben Weise wird das Summenvieleck $\mathfrak{F}''$ von $\mathfrak{F}_1''$ und $\mathfrak{F}_2''$ gebildet. Beide Figuren, mit der gemeinsamen Seite s aneinandergelegt, ein konvexes Vieleck, dessen Seiten gleich den Summen der entsprechenden Seiten von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind, das mithin dem Summenvieleck $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ kongruent ist. Die Konstruktion, die aus dem Summenvieleck den gemischten Flächeninhalt ableitet, zeigt die Richtigkeit der Formel (5).

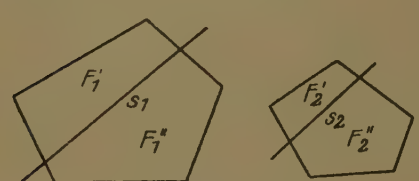

Fig. 5

4. Die Minkowskische Ungleichheit für n-Ecke. Wir nehmen an, daß die Ungleichheit für $(n-1)$-Ecke als gültig dargetan ist (sie gilt für Dreiecke und Parallelogramme); dann gestattet der eben bewiesene Hilfssatz, sie für n-Ecke aufzustellen. Sind $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ die gegebenen n-Ecke, so kann man sie stets durch Verlängerung zweier entsprechenden Seitenpaare bis zum Schnittpunkt als Differenz je eines $(n-1)$-Ecks und eines Dreiecks darstellen:

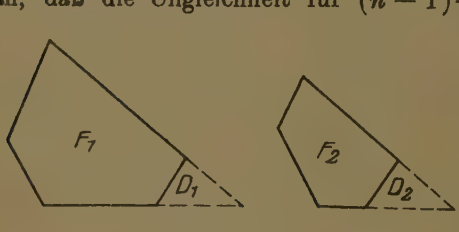

Fig. 6.

$$\mathfrak{F}_1 = \Phi_1 - \mathfrak{D}_1, \qquad \mathfrak{F}_2 = \Phi_2 - \mathfrak{D}_2.$$

(Der Ausnahmefall der Parallelogramme ist schon erledigt.)

Nennt man φ_1, φ_2 die Flächeninhalte der $(n-1)$-Ecke Φ_1, Φ_2, M_{n-1} ihren gemischten Flächeninhalt, D_1, D_2 die Flächeninhalte von $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ und M_3 ihren gemischten Flächeninhalt, so sind die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Es ist daher der gemischte Flächeninhalt von $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$

$$M_n = M_{n-1} - M_3,$$

und nach Voraussetzung

$$M_{n-1}^2 \geqq \varphi_1 \varphi_2,$$

sowie

$$M_3^2 = D_1 D_2,$$

obei

$$\varphi_1 = F_1 + D_1, \qquad \varphi_2 = F_2 + D_2$$

setzen ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} M_n^2 &= (M_{n-1} - \sqrt{D_1 D_2})^2 \geqq (\sqrt{\varphi_1 \varphi_2} - \sqrt{D_1 D_2})^2 \\ &\geqq (F_1 + D_1)(F_2 + D_2) + D_1 D_2 - 2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2 D_1 D_2} \\ &\geqq F_1 F_2 + u - v, \end{aligned}$$

obei die positiven Größen u und v durch die Gleichungen

$$u = F_1 D_2 + F_2 D_1 + 2 D_1 D_2$$
$$v^2 = 4 D_1 D_2 (F_1 + D_1)(F_2 + D_2)$$

geben sind. Aus diesen Werten folgt nach elementarer Rechnung

$$u^2 - v^2 = (F_1 D_2 - F_2 D_1)^2,$$

h. es ist immer

$$u \geqq v,$$

nd zwar tritt das Gleichheitszeichen nur dann ein, wenn

$$F_1 : F_2 = D_1 : D_2$$

t. Damit wird stets

$$M_n^2 \geqq F_1 F_2,$$

nd eine nähere Diskussion der Gleichheitsbedingung, die wegen ihres anz elementaren Charakters übergangen sei, zeigt, daß dies dann und ur dann gilt, wenn es sich um ähnliche Vielecke handelt.

Es liegt nahe, daran zu denken, denselben Gedankengang auch auf en Raum zu übertragen. In der Tat findet man unschwer für die beiden emischten Volumen zweier Körper, ebenso wie für das gemischte Volumen eier Körper eine ganz ähnliche geometrische Deutung wie für den gemischten Flächeninhalt. Indessen läßt sich die hier angewandte Schlußweise nur für eine spezielle Klasse von Vielflachen anwenden, so daß die llgemeine geometrische Ableitung der beiden Minkowskischen Ungleichungen im Raume noch weitergehende Hilfsmittel erfordert.

Hannover, den 8. September 1921.

(Eingegangen am 12. September 1921.)

Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik.

Von

Leon Chwistek in Krakau.

§ 1.

Einleitung.

Zunächst wollen wir feststellen, daß das Problem der Antinomien der formalen Logik bisher nicht erledigt worden ist. Es wurden zwar mehrere Vorschläge zur Beseitigung dieser Antinomien gemacht, von denen manche (wie die Russellsche Typentheorie) als besonders interessant angesehen werden müssen, nichtsdestoweniger bringt keine dieser Theorien eine endgültige Lösung. Vor allem bleibt die Frage offen, ob es zur Beseitigung der Antinomien der formalen Logik absolut notwendig ist, eine Beschränkung des Geltungsbereichs des Arguments x vorzunehmen, d. h. ob eine Art Typentheorie unumgänglich ist. Im folgenden möchte ich daher zeigen, daß die Russellsche Mengenantinomie sich derart transformieren läßt, daß sie zu einer inneren Antinomie des Kalküls der Urteilsfunktionen wird und deshalb eine Beschränkung des Geltungsbereichs des Argumentes x einer Urteilsfunktion als unvermeidbar erscheinen läßt. Auf diese Weise werden wir veranlaßt, den von Russell vorgeschlagenen Weg[1]) als richtig anzuerkennen.

Wir werden jedoch das Whitehead-Russellsche System[2]) als eine endgültige Erledigung des fundamentalen Problems der modernen formalen Logik kaum bezeichnen können. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die sog. Richardsche Antinomie[3]) derart umgestaltet werden kann, daß sie durch das Whitehead-Russellsche System nicht beseitigt wird.

[1]) B. Russell, Mathematical Logic as based on the Theory of Types, American Journal of Mathematics 30 (1908), S. 222.

[2]) Whitehead and Russell, Principia Mathematica (Cambridge 1910).

[3]) Vgl. H. Poincaré, Les mathématiques et la logique, Revue de Métaphysique et de Morale 1906.

ist zwar schon bemerkt worden, daß die Richardsche Antinomie inen inneren Widerspruch der formalen Logik darstellt, da sie vielmehr m Ideenbereich der Semantik gehört; hätten wir aber Recht, die ichardsche Antinomie zu ignorieren, so wäre die Russellsche Typen- eorie als teilweise überflüssig zu bezeichnen, wie wir es im folgenden igen werden. Es ist also zu schließen, daß die Russellsche Typen- eorie gründlich umgeformt werden muß, und zwar, nach meiner Ansicht, der Richtung, auf die die Richardsche Antinomie hinweist, da es sich nicht um eine Lösung dieser speziellen Frage, sondern vielmehr darum ndelt, allgemeine Grundlagen für eine widerspruchsfreie Logik zu finden.

§ 2.

Allgemeine Antinomie der formalen Logik.

Betrachten wir irgendeine Urteilsfunktion $\Phi\hat{x}$, d. i. ein Objekt, das ein Urteil übergeht, wenn wir x durch irgendeinen bestimmten Gegen- and ersetzen, so scheint es zunächst möglich, für den Gültigkeitsbereich es Arguments x dieser Funktion alle Gegenstände zu betrachten. Nehmen ir nun an, es sei wirklich der Fall, so können wir folgenden Ausdruck auen:

$$(\exists\Phi).\sim\Phi x.x=\Phi\hat{z},$$

en wir der Kürze halber mit $Q(x)$ bezeichnen wollen. Hier bezeichnet $\exists\Phi$). „für gewisse Φ", $\sim\Phi x$ die Negation von Φx, der Punkt zwischen $\sim\Phi x$ und $x=\Phi\hat{x}$ die logische Multiplikation jener Urteile. Betrachten ir nun die Urteilsfunktion $Q(\hat{x})$ und nehmen wir an, daß diese Urteils- nktion selbst zu dem Variabilitätsbereiche ihres Arguments x gerechnet erden darf, so ist es leicht zu zeigen, daß es eine solche Funktion nicht eben kann, da sie zum widerspruchsvollen Satze:

$$Q(Q\hat{z}).\sim Q(Q\hat{z})$$

ihrt.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir erstens an, daß $Q(Q\hat{z})$ ahr ist. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} Q(Q\hat{z}).\supset.(\exists\Phi).\sim\Phi(Q\hat{z}).Q\hat{z}=\Phi\hat{z} \\ .\supset.(\exists\Phi).\sim\Phi(Q\hat{z}).Qx\equiv_x\Phi x, \end{aligned}$$

o $Qx\equiv_x\Phi x$ eine Äquivalenz für alle x bezeichnet, die ja wohl aus der dentität beider Funktionen unmittelbar gefolgert wird. Des weiteren aben wir:

$$\begin{aligned} 1)\qquad Q(Q\hat{z}).\supset.(\exists\Phi).\sim\Phi(Q\hat{z}).Q(Q\hat{z})\equiv\Phi(Q\hat{z}) \\ \supset.\sim Q(Q\hat{z}). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, daß $\sim Q(Q\hat{z})$ gilt, so kommt bekanntermaßen:

$$\sim Q(Q\hat{z}).\supset.(\Phi):Q\hat{z} = \Phi\hat{z}.\supset.\Phi(Q\hat{z}),$$

wo (Φ) die Abkürzung von „für alle $\Phi\hat{z}$" ist. Dieser letzte Schluß muß insbesondere für jedes einzelne $\Phi\hat{z}$ gelten, es kommt also:

$$\sim Q(Q\hat{z}).\supset:Q\hat{z} = Q\hat{z}.\supset.Q(Q\hat{z})$$

und wegen der Wahrheit der Hypothese $Q\hat{z} = Q\hat{z}$, einfach:

$$\sim Q(Q\hat{z}).\supset.Q(Q\hat{z}). \tag{2}$$

Es ist nun klar, daß unsere Sätze (1) und (2) zusammen eine Antinomie ergeben. Es ist also keineswegs möglich, $Q\hat{z}$ ohne weiteres als eine Urteilsfunktion zu betrachten.

Da nun aber $Q\hat{z}$ die wesentliche Eigenschaft jeder definiten Urteilsfunktion besitzt, daß sie nämlich mittels logischer Operationen über gegebenen Argumenten entsteht, so erscheint der obige Schluß als unannehmbar, insofern wir die fundamentalen logischen Operationen als unantastbar betrachten wollen. Es bleibt also kaum etwas anderes übrig, als den Geltungsbereich des Argumentes x der Urteilsfunktion $Q\hat{x}$ auf irgendeine Weise zu beschränken, und zwar so, daß dadurch $Q\hat{x}$ von diesem Bereich ausgeschlossen werde.

So erscheint eine logische Typentheorie als Grundlage jeder modernen formalen Logik, welche die fundamentalen Operationen der Algebra der Logik behalten will, als durchaus notwendig.

§ 3.

Wiederaufbau der Richardschen Antinomie.

Fragen wir nun, ob die Russellsche Typentheorie dem genannten Zwecke vollkommen entspricht, so ist folgendes zu bemerken. Nach dieser Theorie hat jeder Gegenstand einen bestimmten logischen Typus und jeder Gültigkeitsbereich eines Arguments besteht aus Gegenständen, denen derselbe logische Typus zukommt.

Die Umkehrung gilt aber nicht, da ein Gegenstand vom gegebenen Typus zu Gültigkeitsbereichen der Argumente von Funktionen verschiedener Typen gehören kann. Zwei Funktionen, die verschiedenen Typus und denselben Gültigkeitsbereich ihrer Argumente haben, werden wir nach Russell als Funktionen verschiedenen Ranges bezeichnen.

Russell nimmt nun an, es gäbe einen niedrigsten Rang der Funktionen, der nämlich dadurch bezeichnet wird, daß die bezüglichen Funktionen keine scheinbaren Argumente enthalten, d. h. ohne Benutzung der Begriffe „für alle x" und „für gewisse x" gedacht werden können. Diese

rteilsfunktionen werden wir nach Russell prädikativ nennen und mit ymbolen wie:

$$\Phi!\,\hat{x}, \quad f!\,(\hat{x}, \hat{y})$$

nd dergleichen, bezeichnen.

Für die Russellsche Typentheorie ist nun ein gewisses Axiom (das genannte Reduzibilitätsaxiom) wesentlich, welches in folgenden Sätzen rmuliert werden kann:

$$(\exists\,\Phi).\,\Phi!\,x \equiv_x f x$$
$$(\exists\,\Phi).\,\Phi!\,(x, y) \equiv_{x,y} f(x, y).$$

Nach diesem Axiom existiert nun immer eine einer gegebenen Funktion quivalente prädikative Funktion.

Ich möchte nun zeigen, daß die Annahme dieses Axioms ohne weiteres um Wiederaufbau der Richardschen Antinomie führt. Zunächst sei es emerkt, daß das Reduzibilitätsaxiom dazu geeignet ist, die Mengenehre sowie den Relationskalkül dermaßen zu gestalten, daß jedes Urteil ber eine Menge α, beziehungsweise über eine Relation R, als ein Urteil ber eine prädikative Funktion betrachtet werden kann. Bezeichnen wir un nach Whitehead und Russell Mengen mit kleinen griechischen Buchstaben, die Relationen aber mit großen Buchstaben des lateinischen lphabets, so hat nach der Russellschen Typentheorie folgender Ausdruck:

$$x \in D^{\epsilon} R.(\exists\,\alpha).\,x R \beta \equiv_{\beta} \beta = \alpha.\sim x \in \alpha$$

inen bestimmten Sinn. Hier bezeichnet:

$x \in D^{\epsilon} R \ldots$ x ist Element des oberen Bereiches der Relation R

$(\exists\,\alpha) \ldots$ für gewisse α

$x R \beta \ldots$ x hat die Beziehung R zur Menge β

$R \beta \equiv_{\beta} \beta = \alpha \ldots$ „$x R \beta$“ ist äquivalent „$\beta = \alpha$“ für alle Mengen β.

Bezeichnen wir nun den obigen Ausdruck mit $f x$ und betrachten vir alle Urteilsfunktionen, die denselben Typus wie $f\hat{x}$ besitzen[4]), so können vir nach dem Ideengang von Richard diese Funktionen in zwei Gruppen eilen, je nachdem sie mittels gegebener Buchstaben oder Symbole konstruierbar sind oder nicht. Nach den bekannten Richardschen Überegungen scheint nun festzustehen, daß die erste Gruppe eine abzählbare Menge von Funktionen bilden muß, daß es also eine viel-eindeutige Beziehung S' geben muß, deren oberer Bereich $D^{\epsilon} S'$ mit der Menge aller nduktiven (natürlichen) Zahlen, der untere Bereich $\mathcal{C}^{\epsilon} S'$ aber mit der Menge aller konstruierbaren Urteilsfunktionen des $f\hat{x}$-Typus identisch ist.

[4]) Die Existenz der Funktion $f\hat{x}$ im Bereiche des Whitehead-Russellschen Systems steht nach Satze $*20 \cdot 632$ von „Principia Mathematica“ fest.

Bemerken wir nun, daß zu jeder Urteilsfunktion $\psi\hat{x}$ des $f\hat{x}$-Typus eine bestimmte Menge $\hat{z}(\psi z)$ ihrer Elemente gehört, so ist es klar, daß es eine viel-eindeutige Beziehung S zwischen allen induktiven (natürlichen) Zahlen und zwischen allen durch konstruierbare Funktionen des $f\hat{x}$-Typus eindeutig bestimmten Mengen geben muß[5]).

Nehmen wir nun einmal an, daß die Relation S gegeben sei, so ist es ohne weiteres klar, daß S denselben Typus wie das in $f\hat{x}$ vorkommende R besitzt, daß also, wenn wir

$$x \in D^{c}S.(\exists\alpha):xS\beta.\equiv_{\beta}.\beta=\alpha:\sim x\in\alpha$$

mit Φx bezeichnen, $\Phi\hat{x}$ denselben Typus wie $f\hat{x}$ haben muß. — Daraus folgt sofort, da $\Phi\hat{x}$ offenbar konstruierbar ist, daß es mindestens eine induktive Zahl n gibt, welche die Bedingung $nS\hat{z}(\Phi z)$ erfüllt.

Nun ist aber andererseits leicht zu zeigen, daß es keine solche induktive Zahl geben kann, wodurch die Richardsche Antinomie wiedergewonnen wird. Nehmen wir nämlich an, es existiere eine solche Zahl, so muß sie der Menge $\hat{z}(\Phi z)$ angehören oder nicht. Im ersten Falle haben wir $n\in\hat{z}(\Phi z)$, was dem Satze Φn äquivalent ist, im anderen Falle aber haben wir $\sim n\in\hat{z}(\Phi z)$, oder kürzer $\sim\Phi n$. Nehmen wir nun an, Φn sei wahr, so kommt:

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi n.\supset.(\exists\alpha).nS\beta\equiv_{\beta}\beta=\alpha.\sim n\in\alpha \\ \quad .\supset.(\exists\alpha).nS\hat{z}(\Phi z)\equiv\hat{z}(\Phi z)=\alpha.\sim n\in\alpha \\ \quad \supset.\sim n\in\hat{z}(\Phi z) \\ \quad \supset.\sim\Phi n. \end{cases}$$

Nehmen wir aber $\sim\Phi n$ an, so kommt:

$$\sim\Phi n.\supset.(\alpha):nS\beta\equiv_{\beta}\beta=\alpha.\supset.n\in\alpha$$
$$\supset:nS\beta\equiv_{\beta}\beta=\hat{z}(\Phi z).\supset.n\in\hat{z}(\Phi z).$$

Nun ist aber wegen der Viel-eindeutigkeit von S klar, daß, nach unserer Voraussetzung: $nS\hat{z}(\Phi z)$, die Äquivalenz:

$$nS\beta\equiv\beta=\hat{z}(\Phi z)$$

für beliebige β vorkommen muß, daß also auch die Hypothese

$$nS\beta\equiv_{\beta}\beta=\hat{z}(\Phi z)$$

wahr ist. Wir müssen also schließen:

$$(2)\quad \sim\Phi n.\supset.n\in\hat{z}(\Phi z)$$
$$\supset.\Phi n,$$

was einen offenbaren Widerspruch mit (1) gibt.

[5]) Es ist aus dem Satze *21·56 von „Principia Mathematica" zu schließen, daß man S als eine Relation im Whitehead-Russellschen Sinne betrachten darf. —

Wollen wir nun aber diesen Widerspruch beseitigen, so scheint nichts brig zu bleiben, als die Funktion $\Phi\hat{x}$ aus dem Bereiche des $f\hat{x}$-Typus uszuschließen, was ohne die Beseitigung des Reduzibilitätssatzes nicht öglich ist. So erscheint der Reduzibilitätssatz als eine widerspruchsvolle nnahme und deswegen können wir ohne weiteres der Russellschen Typenheorie im ganzen nicht zustimmen.

Würden wir aber die Bedenken mancher Logiker gegen den theoetischen Wert der Richardschen Methode teilen, so wäre es klar, daß ein wirklicher Grund für die Unterscheidung der Ranghöhen der Urteilsnktionen vorliegt. In diesem Falle wäre der Reduzibilitätssatz überissig. Jedenfalls ist also die Russellsche Typentheorie einer neuen ritischen Umarbeitung bedürftig.

§ 4.

Allgemeine Typentheorie.

Zum Schluß sei es mir erlaubt einige Worte über die Resultate mitteilen, die es mir in meiner vieljährigen Arbeit an einer Rekonstruktion s Whitehead-Russellschen Systems mit Beseitigung des Reduzibilitätstzes zu gewinnen gelang[6]).

Sprechen wir der Richardschen Antinomie jeden theoretischen Wert , so bekommt die formale Logik eine wesentliche Vereinfachung, da wir n wohl mit Typen, aber nicht mehr mit Rängen von Funktionen zu n haben, womit es uns ermöglicht wird, kurzweg von „allen Eigenhaften" eines Dinges zu sprechen. Auf diese Weise können wir ohne eiteres aus dem Whitehead-Russellschen System ein neues System gennen, welches denselben theoretischen Wert wie jenes haben muß.

Es bleibt aber immer mancher Zweifel über die Widerspruchslosigkeit eses Systems übrig, und ungeachtet dieses Bedenkens — bleibt immer lgende Frage von prinzipieller Wichtigkeit übrig:

Ist ein System der formalen Logik möglich, welches auf der allmeinen Typentheorie — ohne Reduzibilitätssatz gegründet wäre und nst keine neuen Axiome vorauszusetzen hätte?

Auf diese Frage bin ich imstande eine bejahende Antwort zu geben, dem es mir gelungen ist, solches System aufzubauen und insbesondere e Theorie der kardinalen und induktiven Zahlen ohne jede Zusatzhypoese, die nicht bereits im Whitehead-Russellschen System vorhanden re, herzustellen.

---

[6]) Theory of constructive Types, — bisher ungedruckt.

Von der näheren Charakterisierung dieses Systems möchte ich hier absehen. Ich möchte jedoch folgendes nicht ungesagt lassen.

Whitehead und Russell haben nachstehende Argumente für die Unabweisbarkeit des Reduzibilitätssatzes angeführt:

1. Wollen wir keine gesonderte Axiomatik des Identitätsbegriffes einführen, so bleibt nur folgende Definition der Identität übrig:

$$x = y \cdot \overline{=}_{df} \cdot (\Phi) \cdot \Phi ! x \supset \Phi ! y,$$

wo „$\overline{=}_{df}$“ als „gleich durch Definition“ zu lesen ist[7]). Nun ist es aber klar, daß wir es hier nur mit einer Identität „ersten Ranges“ zu tun haben, welche nur dann als Ersatz der allgemeinen Identität gelten kann, wenn wir gleichzeitig den Reduzibilitätssatz berücksichtigen wollen.

Nun ist es aber leicht zu beweisen, daß

$$\alpha = \beta \cdot \equiv \cdot x \in \alpha \equiv_x x \in \beta,$$

wo „$=$“ die Identität eines beliebigen (nicht allzu kleinen) Ranges bezeichnet. Auf diese Weise wird die Identität eines beliebigen (nicht allzu kleinen) Ranges zweier Mengen auf Äquivalenz der bezüglichen Urteilsfunktionen zurückgeführt. Analoges gilt für Relationen.

Da nun aber eine allgemeine Mengen- und Relationenlehre die wahre Grundlage der apriorischen Wissenschaften bildet, so ist es hinreichend, einen allgemeinen Begriff der Identität für Mengen und Relationen zu haben, und, da wir nach dem obigen einen vollen Ersatz dieses Begriffes gewonnen haben, können wir das erste Whitehead-Russellsche Argument als überwunden ansehen.

2. Whitehead und Russell sagen, es sei unmöglich, den Begriff der Menge bzw. der Relation ohne den Reduzibilitätssatz zu gewinnen, da es uns nach der Typentheorie untersagt bleibt über „alle Eigenschaften“ eines Dinges zu sprechen.

Die Whitehead-Russellsche Definition der Menge $\hat{z}(\Phi z)$

$$f[\hat{z}(\Phi z)] \cdot \overline{=}_{df} \cdot (\exists \psi) \cdot \psi ! z \equiv_z \Phi z \cdot f(\psi ! \hat{z})$$

ist aber jedes instruktiven Wertes ledig und infolgedessen nur insoweit zulässig, als sie den bekannten Huntingtonschen Mengenlehrepostulaten Genüge leistet. Nun ist es leicht zu sehen, daß diese Eigenschaft auch folgender Definition zukommt:

$$f[\hat{z}(\Phi z)] \cdot \overline{=}_{df} (\exists \psi)_{\Phi \hat{z}} \cdot \psi z \equiv_z \Phi z \cdot f(\psi \hat{z})\ ^{8}),$$

was folgendermaßen zu lesen ist:

---

[7]) Dieses Symbol ist von Dr. Wilkosz eingeführt worden.

[8]) Diese Definition ist schon in meinem Buche: Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań B. Russella (Krakau 1912) zu finden.

Ein beliebiges Urteil f über die Menge $\hat{z}(\Phi z)$ aller Dinge, welche
r Funktion $\Phi\hat{z}$ Genüge leisten, ist durch Definition folgendem Urteil
eich: „es gibt eine Funktion $\psi\hat{z}$, welche den $\Phi\hat{z}$-Typus besitzt und
$\hat{z}$ äquivalent ist, wobei das Urteil $f(\psi\hat{z})$ gilt".

Analoges ist für Relationen zu tun.

Auf diese Weise gewinnen wir sicheren Grund für eine Mengen- und
elationenlehre, ohne irgendeinen Gebrauch vom Reduzibilitätssatze zu
achen. Es ist zu bemerken, daß diese Theorie offenbar allgemeiner als
e klassische sein muß, da die klassische Theorie aus ihr zu gewinnen ist,
enn man vom Range der Funktionen absieht.

3. Was nun das dritte Whitehead-Russellsche Argument anbelangt,
elches auf die Schwierigkeiten der Kardinalzahlentheorie ohne Reduzi-
litätssatz hinweist, so ist es zu bemerken, daß es sich offenbar vom
ufbau dieser Theorie in ihrem klassischen Sinne nicht handeln kann, da
ir mit einer viel allgemeineren, sozusagen nicht-euklidischen Theorie
chnen müssen, von welcher wir aber immer zur Whitehead-Russell-
hen Theorie übergehen können, wenn wir von der Rangdifferenz der
rteilsfunktionen absehen wollen.

Was die reellen Zahlen anbelangt, so ist zu bemerken, daß sich der
antorsche Beweis für die Existenz des Kontinuums in unserem System
cht führen läßt, so daß es ohne Sonderhypothese in dieses System nicht
ngeführt werden darf. Dieser Tatbestand scheint mir äußerst wichtig
ı sein, da er uns das Problem des Aktuell-Unendlichen vom neuen Stand-
ınkte aus betrachten läßt.

Es ist mancherseits und besonders von Poincaré bemerkt worden[9]),
aß die klassische Mathematik vom Begriffe des als Menge betrachteten
ontinuums unabhängig ist. Nun ist es mir gelungen diese Bemerkung
s zutreffend zu erweisen, indem ich eine Definition des Lebesgueschen
aßes gegeben habe[10]), die, an die Typentheorie anknüpfend, von der
xistenz des Kontinuums (als Menge gedacht) unabhängig ist.

---

[9]) Vgl. Acta Mathematica 32, S. 199.

[10]) Die diesbezügliche Note ist im Juni 1921 der Lemberger Gesellschaft der
issenschaften vorgelegt worden.

(Eingegangen am 15. September 1921)

Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper.

Von

Michael Bauer in Budapest.

Die Methoden zur Untersuchung der algebraischen Körper hat H. Hensel durch die Theorie der sogenannten p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen bereichert. Seine erste diesbezügliche Publikation[1]) verwendet noch die klassische Idealtheorie; die späteren Publikationen betrachten die neue Theorie selbst dann als Prius, wenn mittels derselben gewöhnliche algebraische Zahlkörper untersucht werden sollen[2]).

In den folgenden Zeilen möchte ich von der klassischen Idealtheorie ausgehend, ein sehr naheliegendes Verfahren auseinandersetzen, welches der Gleichung

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten gewöhnliche rationale ganze Zahlen sind und die im gewöhnlichen Sinne irreduzibel ist, n solche $\mathfrak{P}$-adische Wurzeln zuordnet, welche mit den gewöhnlichen Wurzeln als *identisch* betrachtet werden können. Durch weitere idealtheoretische und algebraische Betrachtungen wird unvermittelt der Zusammenhang aufgedeckt, welcher zwischen den p-adischen irreduziblen Faktoren von (1) und den Primidealfaktoren von p im Körper, der durch eine Wurzel von (1) gegeben wird, besteht.

Der § 1 enthält idealtheoretische und algebraische Tatsachen, § 2 gibt die Konstruktion des $\mathfrak{P}$-adischen Körpers und die Zerfällung von (1) im

---

[1]) Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Mathematische Annalen 55 (1902), S. 301–336.

[2]) Hier kommen in erster Linie in Betracht: Theorie der algebraischen Zahlen 1 (1908). Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper, Journal für Mathematik 136 (1909), S. 183–209. Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Mathematische Zeitschrift 2 (1918), S. 433–452.

adischen Körper[3]), § 3 beweist die Henselsche Tatsache, daß jede adische algebraische Gleichung „algebraisch" auflösbar ist, eine Tatche, die — wie es sich hier ergibt — im engsten Zusammenhange mit r Hilbertschen Theorie der Zerlegungsgruppe ist[4]). (Die Untersuchungen id auf Relativkörper ausdehnbar.)

§ 1.

Sätze aus der Idealtheorie und der Algebra.

1. Es sei w eine Wurzel von (1), welche den Körper K bestimmt. er Galoissche Körper von K soll durch G bezeichnet werden, seine ruppe sei $\mathfrak{G}$ und K gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{K}$. Eine grundlegende egel von Dedekind[5]) gibt die Zerfällung von p folgendermaßen an. s sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal von p im Körper G, die Zerlegungsruppe von $\mathfrak{P}$ soll durch $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden. Zunächst muß die Gruppe $\mathfrak{G}$ nod $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$) zerlegt werden, es sei[6])

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} R_1 \mathfrak{K} + \mathfrak{H} R_2 \mathfrak{K} + \ldots + \mathfrak{H} R_k \mathfrak{K}, \tag{2}$$

ier bedeuten $R_1 = E, R_2, \ldots, R_k$ die (mod $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$) inkongruenten Elemente. Wenn (2) statthat, so ist im Körper K

$$p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k}, \tag{2*}$$

o die Primideale $\mathfrak{p}_i$ den Grad f_i besitzen und das Produkt $f_i g_i$ gleich er Anzahl der verschiedenen Elemente des Komplexes $\mathfrak{H} R_i \mathfrak{K}$ dividiert urch die Anzahl der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{K}$ ausfällt.

Die Primideale $\mathfrak{p}_i$ des Körpers K weisen in G die Zerfällung

$$\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_{i1} \ldots)^{a_i} \tag{2**}$$

uf, wo die eingeklammerten Primideale die verschiedenen Ideale des Komplexes $\mathfrak{H} R_i \mathfrak{K} \mathfrak{P}$ sind. (Der Zusammenhang der Zahlen f_i, g_i, a_i mit er Zerlegungsgruppe $\mathfrak{H}$ und der Trägheitsgruppe, sowie der Gruppe $\mathfrak{K}$ ommt hier nicht in Betracht.)

---

[3]) Für den Fall, daß die Koeffizienten von (1) rationale p-adische Zahlen sind nd (1) im Körper der rationalen p-adischen Zahlen irreduzibel ist, kann nach I. Hensel das Problem der $\mathfrak{P}$-adischen Wurzeln auf das analoge Problem einer Gleichung $g(x) = 0$ zurückgeführt werden, welche gewöhnliche rationale Koeffizienten esitzt und im Körper der rationalen p-adischen Zahlen irreduzibel ausfällt. Das Polynom $g(x)$ ist ein geeignetes Näherungs-Polynom von $f(x)$.

[4]) Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers, Göttinger Nachichten 1894, S. 224—236. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4 (1897), § 49.

[5]) Zur Theorie der Ideale, Göttinger Nachrichten 1894, S. 272—277.

[6]) Die Operationen müssen von links nach rechts ausgeübt werden.

2. Zwei Konsequenzen der vorstehenden Regel sind für uns wichtig. Wenn $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ beliebige Primfaktoren von p in K bzw. G bedeuten, so ist immer ein Element R der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorhanden, daß $\mathfrak{p}$ durch $R\mathfrak{P}$ teilbar ist, infolgedessen besitzt $\mathfrak{p}$ nach den Vorigen nur die verschiedenen Primideale des Komplexes $\mathfrak{H}R\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ als Teiler. Also besteht die folgende Tatsache:

I. Ist $\mathfrak{p}$ durch $R\mathfrak{P}$ teilbar, dann sind unter den Konjugierten von $\mathfrak{p}$ diejenigen und nur diejenigen durch $\mathfrak{P}$ teilbar, welche in einem der Körper $\mathfrak{R}R^{-1}\mathfrak{H}w$ vorkommen.

Hieraus folgt noch, daß die Ordnung einer Zahl von K in bezug auf $\mathfrak{p}$ auch durch die Ordnung einer gewissen konjugierten Zahl in bezug auf $\mathfrak{P}$ angegeben werden kann. Es gilt nämlich der folgende Satz:

II. Die Ordnung einer Zahl Ω des Körpers K in bezug auf $\mathfrak{p}$ ist gleich der Ordnung, welche die Konjugierten von Ω in irgendwelchem der Körper $\mathfrak{R}R^{-1}\mathfrak{H}w$ in bezug auf $\mathfrak{P}$ besitzen. Letztere Ordnungen bekommt man, wenn der Exponent der Potenz von $\mathfrak{P}$, welche in der betreffenden Zahl genau vorkommt, durch den kleinsten positiven Exponenten, welcher im Körper auftritt, dividiert wird.

Um den Beweis zu leisten, muß nur bemerkt werden, daß wenn Ω genau $\mathfrak{p}^h$ enthält, dann enthält nach den Vorigen eine jede der Zahlen $\mathfrak{R}R^{-1}\mathfrak{H}\Omega$ genau $\mathfrak{P}^{ah}$, wo a eine konstante Zahl ist, und zwar enthält laut (2**) ein jedes der Idealen $\mathfrak{R}R^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{p}$ genau $\mathfrak{P}^a$.

3. Zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehöre der Zerlegungskörper H. Nach Adjunktion einer primitiven Zahl α von H wird nach Landsberg[7])

$$f(x) = f_1(x, \alpha) f_2(x, \alpha) \dots f_k(x, \alpha), \tag{3}$$

wo die Koeffizienten der irreduziblen Polynome $f_i(x, \alpha)$ Zahlen des Körpers H bilden und die Wurzeln von $f_i(x, \alpha) = 0$ die verschiedenen Zahlen des Komplexes $\mathfrak{R}R_i^{-1}\mathfrak{H}w$ sind. Da der Körper K zur Untergruppe $\mathfrak{R}$ gehört, so ist die Anzahl der Wurzeln nach den Vorigen gleich $f_i g_i$.

§ 2.

Der Körper der rationalen p-adischen Zahlen und seine Erweiterung.

1. Die Konstruktion des p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Körpers kann leicht durch ein Verfahren geschehen, welchem der von H. Kürschák[8]) eingeführte Begriff der Bewertung zugrunde liegt. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges

[7]) Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion, Journal für Mathematik 132 (1907), S. 1–20.

[8]) Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Journal für Mathematik 142 (1913), S. 211–253.

rimideal von p in G. Jede Zahl Φ von G, welche nicht Null ist, be-itzt in bezug auf $\mathfrak{P}$ einen höchsten Exponenten, es sei dieser durch h be-eichnet. Als Bewertung von Φ definieren wir $\|\Phi\| = e^{-h}$, wo $e > 1$ ine sonst beliebige reelle Zahl ist. Die Bewertung von Null soll gleich ull sein. Es ist ersichtlich, daß die Bewertung eines Produkts gleich em Produkte der Bewertungen der Faktoren ist. Die Bewertung einer umme ist nicht größer als die Bewertungen der Glieder und gleich der ewertung des Gliedes, dessen Bewertung die größte ist, falls ein solches lied existiert. So entstehen die Begriffe der Fundamentalreihe und des renzwertes. Erweitert man die Zahlen des Körpers G[9]) durch diese enselschen Grenzwerte, so bekommt man einen perfekten Körper, elcher die rationalen p-adischen Zahlen als Unterkörper enthält und in elchem $f(x) = 0$ n solche $\mathfrak{P}$-adische Wurzeln besitzt, die mit den ge-öhnlichen Wurzeln als identisch angesehen werden können. Die Glei-hung (1) bleibt im Körper der rationalen p-adischen Zahlen nicht irre-uzibel; die in der Formel (3) auftretenden Faktoren $f_i(x, \alpha)$ werden -adisch je einem irreduziblen Polynome $P_i(x)(p)$ gleich.

2. Zunächst ist nach H. Hilbert eine jede ganze Zahl des Zerle-ungskörpers nach dem Modul $\mathfrak{P}^t$ einer ganzen rationalen Zahl kongruent, elche natürlich von t abhängt; es ist also jede Zahl des Zerlegungs-örpers gleich einer rationalen p-adischen Zahl und so wird

3*) $$f_i(x, \alpha) = P_i(x)(p),$$

o die Koeffizienten von $P_i(x)$ rationale p-adische Zahlen sind. Die urzeln von $P_i(x) = 0\,(p)$ werden durch die verschiedenen Zahlen[10]) des omplexes $\mathfrak{R} R_i^{-1} \mathfrak{Q} w$ geliefert, wir werden die Irreduzibilität von $P_i(x)(p)$ achweisen. Es sei $G(x) = 0\,(p)$ eine Gleichung mit rationalen ganzen -adischen Koeffizienten, welche durch eine der Zahlen des Komplexes $R_i^{-1} \mathfrak{Q} w$ erfüllt wird, z. B. bilde die Zahl

3**) $$\bar{\Omega} = \bar{K} R_i^{-1} \bar{H} w,$$

[9]) Die Zahl Φ wird als Grenzwert der Fundamentalreihe $\Phi, \Phi, \ldots, \Phi, \ldots$ be-achtet.

[10]) Die sind auch im $\mathfrak{P}$-adischen Sinne verschieden. Die Elemente einer Funda-entalreihe, welche keine Nullreihe ist, enthalten von einem genügend großen Index ieselbe Potenz von $\mathfrak{P}$. Der Exponent h sei der zum Grenzwerte gehörige Exponent. on den Zahlen des Körpers, welche durch eine Wurzel der Gleichung $P_i(x) = 0\,(p)$ egeben wird, sollen die Zahlen mit nicht negativen Exponenten als ganze Zahlen ezeichnet werden. Aus dem Texte ersieht man, daß eine Zahl dann und nur dann anz wird, wenn sie eine Gleichung mit rationalen ganzen p-adischen Koeffizienten füllt, deren höchster Koeffizient gleich Eins ist. Es ist sogar evident, daß eine ahl dann und nur dann ganz ist, wenn ihre Norm eine ganze rationale p-adische ahl bildet.

wo $\overline{K}$ bzw. $\overline{H}$ Elemente der Gruppen $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{H}$ sind, eine $\mathfrak{P}$-adische Wurzel. Dies bedeutet soviel, daß zu jedem Werte von t ein geeignetes Näherungs-Polynom $g(x)$ von $G(x)(p)$ existiert, dessen Koeffizienten gewöhnliche rationale ganze Zahlen sind, für welches

$$g(\overline{\Omega}) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{P}^t) \tag{4}$$

ausfällt. Übt man auf diese Kongruenz irgendeine Operation der Gruppe $\mathfrak{H}$ aus, so geht $\mathfrak{P}$ in sich selbst über, folglich wird die Kongruenz

$$g(x) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{P}^t) \tag{4*}$$

durch jede Zahl des Komplexes $\overline{K} R_i^{-1} \mathfrak{H} w = \mathfrak{K} R_i^{-1} \mathfrak{H} w$ erfüllt. Dieselben sind somit Wurzeln der Gleichung

$$G(x) = 0 \,(p). \tag{5}$$

Infolgedessen ist $P_i(x) = 0 \,(p)$ im Körper der rationalen p-adischen Zahlen irreduzibel[11]). Aus dem Beweise ist ersichtlich, daß die Zerfällung von (1) in irreduzible Faktoren eine eindeutige ist.

3. Der Satz II § 1 ergibt, daß die Ordnung einer Zahl des gewöhnlichen Zahlkörpers K in bezug auf die $\mathfrak{p}_i$ gleich ist der Ordnung, welche ihr „Bild" im „Abbildungskörper" der durch eine Wurzel der Gleichung $P_i(x) = 0 \,(p)$ gegeben wird, in bezug auf einen Henselschen Primteiler des Körpers besitzt. Der Primteiler hat den Grad f_i, seine Norm ist äquivalent der Zahl p^{f_i}[12]). Werden die Zahlen des Körpers nur in bezug

---

[11]) Diese Resultate genügen, um die folgende Frage zu lösen. Was ist die notwendige und genügende Bedingung dafür, daß die linke Seite der irreduziblen Gleichung (1) für jede Primzahlpotenz als Modul reduzibel wird. [Vgl. meine Arbeit: Zur Theorie der Fundamentalgleichung, Journal für Mathematik 149 (1919), S. 90.] Die vollständige Lösung dieses Problems ist bisher nicht ohne Anwendung der p-adischen Zahlen bekannt. Analog verhält sich der viel einfachere Satz. Zu jedem Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ mit rationalen ganzen Koeffizienten ist ein vom Polynom abhängiger Exponent t vorhanden, daß $f(x) \,(\mathrm{mod}\, p^v)$, $v \geqq t$ eindeutig als Produkt von $(\mathrm{mod}\, p^v)$ irreduziblen Faktoren darstellbar ist.

[12]) Es sollen hier folgende Tatsachen bemerkt werden. Es sei im Körper K

$$p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k}, \qquad w = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k} \mathfrak{q}, \qquad (p, \mathfrak{q}) = 1.$$

Bezeichnen wir eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$P_i(x) = x^{n_i} + d_1^{(i)} x^{n_i - 1} + \ldots + d_{n_i}^{(i)} = 0, \qquad n_i = f_i g_i$$

durch Ω_i, einen Henselschen Primteiler, des durch Ω_i gegebenen Körpers π_i. Wie wir gesehen haben, sind $p \sim \pi_i^{g_i}$, $\Omega_i \sim \pi_i^{\alpha_i}$. Daher ist

$$\frac{\alpha_i}{g_i} = \frac{\alpha_i f_i}{g_i f_i} = \frac{r_{n_i}^{(i)}}{n_i},$$

wo $r_{n_i}^{(i)}$ die Ordnung der Zahl $d_{n_i}^{(i)}$ in bezug auf p bedeutet. Nun besitzt nach

uf $\mathfrak{p}$ untersucht, wie dies in den grundlegenden Untersuchungen von ensel[13]) über die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen schieht (vgl. auch eine Abhandlung von H. Tonio Rella[14])), dann ge-ügt die Zahlen des Körpers durch solche Henselsche Grenzwerte zu rgänzen, welche mittels des Primideals $\mathfrak{p}$ gebildet werden. In diesem alle benützen wir nur jenen p-adischen irreduziblen Faktor von (1), elchem w genügt.

§ 3.

Die „algebraische" Lösbarkeit der p-adischen Gleichungen.

4. Wir können voraussetzen, daß die Gleichung

$$G(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad G(w) = 0,$$

tionale ganze Koeffizienten besitzt und im gewöhnlichen Sinne eine reduzible Galoissche Gleichung ist. Die Gruppe der Gleichung sei $\mathfrak{G}$ nd es soll

$$p = (\mathfrak{P} \ldots)^g$$

usfallen, wo die sämtlichen eingeklammerten Primideale vom Grade f nd. Das Primideal $\mathfrak{P}$ besitze die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung eich fg ist. Wir bekommen den $\mathfrak{P}$-adischen Körper, wenn wir die ahlen des Körpers G durch die Henselschen Grenzwerte ergänzen. Im örper der rationalen p-adischen Zahlen zerfällt $G(x)$ in irreduzible aktoren vom Grade fg; der Faktor, dem ω genügt, besitzt die Zahlen w als Wurzeln. (Hier wenden wir nicht die allgemeinen Resultate von 1 an.) Die p-adische irreduzible Gleichung für w ist auch im p-adischen inne eine Galoissche Gleichung, ihre Gruppe ist isomorph der Gruppe $\mathfrak{H}$. ieselbe ist nach Hilberts Untersuchungen „auflösbar", durch diese atsache tritt unsere Behauptung in Evidenz.

. Dumas [Sur quelques cas d'irréductibilité des polynoms à coefficients rationnels, ournal de Mathématiques (6) 2 (1906), S. 191–258] das irreduzible Polynom $P_i(x)(p)$ ne einzige Puiseuxsche Zahl in bezug p, die infolgedessen gleich dem Quotienten $\frac{i}{g}$ —ausfällt. [Vgl. meine Arbeit, Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen, ournal für Mathematik 132 (1907) S. 21–32.]

[13]) Die multiplikative Darstellung usw., Journal für Mathematik 146 (1916), 189–215. — Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers usw., Journal r Mathematik 146 (1916), S. 216–228. — Allgemeine Theorie der Kongruenzklassen-uppen usw., Journal für Mathematik 147 (1917), S. 1–15.

[14]) Über die multiplikative Darstellung usw., Journal für Mathematik 150 (1919), 157–174.

(Eingegangen am 14. Oktober 1921.)

Über die Laplacesche Reihe.

Von

F. Lukács †.

(Übersetzt und herausgegeben von G. Szegö)[1]).

§ 1.

Einleitung. Stetige Funktion mit divergenter Laplacescher Reihe[2]).

Es sei $f(\vartheta, \varphi)$ eine auf der Einheitskugel S gegebene Funktion der geographischen Koordinaten ϑ, φ (ϑ die Poldistanz, φ die geographische Breite), die an der Einheitskugel als im Lebesgueschen Sinne integrabel vorausgesetzt wird[3]). Es sei (ϑ', φ') ein veränderlicher Punkt von S, (ϑ, φ) ein fester Punkt und γ die sphärische Distanz derselben:

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi').$$

---

[1]) Die vorliegende Arbeit ist, abgesehen von geringfügigen Modifikationen und Abkürzungen, eine fast wortgetreue Übersetzung der im Jahre 1914 in ungarischer Sprache erschienenen Dissertation des jung verstorbenen Verfassers (27. Juni 1891 bis 30. November 1918). Die Arbeit ist am 30. April 1914 in der Mathematischen Gesellschaft Budapest vorgetragen worden und im Mathematikai és physikai lapok 23 (1914), S. 356–377 erschienen. Die Veranlassung zu der vorliegenden Herausgabe wurde durch die folgenden Umstände gegeben:

a) Eine Note des Verfassers in den Comptes Rendus (a. a. O. [10]), welche eine knappe Zusammenfassung des Inhaltes von § 2 enthält, ist bisher nur wenig beachtet worden, obwohl sie einen äußerst kurzen und eleganten Beweis des Gronwallschen Satzes (a. a. O. [9]) über die ersten arithmetischen Mittel der Laplaceschen Reihe enthält.

b) Die vor kurzem erschienene Arbeit von Herrn Kogbetlianz (vgl. diese Zeitschrift 14 (1922), S. 99–109) weist manche Berührungspunkte mit der vorliegenden auf. [Anmerkung des Übersetzers.]

[2]) Im Original werden in einem vorangehenden Paragraphen die elementaren Eigenschaften der Legendreschen Polynome vorausgeschickt.

[3]) Diejenigen Leser, denen die Lebesgueschen Integrale nicht geläufig sind, mögen hier an Funktionen denken, die im klassischen Sinne absolut integrabel sind.

e Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

in einer 1908 der ungarischen Akademie vorgelegten Arbeit von Fejér tersucht worden[4]), die der Ausgangspunkt der gesamten diesbezüglichen ueren Literatur ist. Dort wurde auch die Frage aufgeworfen, ob die placesche Reihe einer *stetigen* Funktion in einem Punkte divergent n kann. Diese Frage wurde von Haar beantwortet[5]), der die Existenz er *stetigen* Funktion bewiesen hat, deren Laplacesche Reihe in einem nkte *divergiert*[6]). Ich will hier ein einfaches neues Beispiel für eine che stetige Funktion geben, welches prinzipiell mit dem zweiten Beiele von Gronwall (a. a. O. [9]), § 4) verwandt ist.

Es sei

$$f_\nu(\gamma) = \sqrt{\nu+1}\,(P_\nu(\cos\gamma) - P_{\nu+2}(\cos\gamma))(1-\cos\gamma);$$

f Grund der bekannten Ungleichung

$$|P_n(x) - P_{n+2}(x)| < \frac{c_1}{\sqrt{n+1}}\ ^{7}) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

gibt sich

$$|f_\nu(\gamma)| < \sqrt{\nu+1}\,\frac{c_1}{\sqrt{\nu+1}}\,2 = 2c_1.$$

sei nun $\nu_n = n^6$, und bilden wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\nu_n}(\gamma)}{n^2}.$$

ese Reihe ist gleichmäßig konvergent und stellt eine stetige Funktion (γ) dar. Ich will die Laplacesche Reihe der auf S stetigen Funktion $\vartheta, \varphi) = \Phi(\vartheta)$ im Pol, d. h. im Punkte $\vartheta = 0$ studieren. Hier ist das gemeine Glied ($\gamma = \vartheta'$)

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \Phi(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma$$

[4]) Vgl. auch Comptes Rendus **146** (1908), S. 224–227; Mathematische Annalen (1909), S. 76–109.

[5]) Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme [Inauguraldissertation, tingen 1909. Abgedruckt in den Mathematischen Annalen **69** (1910), S. 331–371].

[6]) Vgl. auch Gronwall, a. a. O. [9]), §§ 3, 4.

[7]) Im folgenden bezeichnen wir mit $c_1, c_2, \ldots$ von n unabhängige positive nstanten.

und die k-te Partialsumme, mit Rücksicht auf die Christoffelsche Forme

$$s_k = \int_0^\pi \Phi(\gamma) \frac{k+1}{2} \frac{P_k(\cos\gamma) - P_{k+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma.$$

Wird hier $\Phi(\gamma)$ eingesetzt und die Reihenfolge der Integration und Sum mation vertauscht, so folgt

$$s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f_{\nu_n}(\gamma) \frac{k+1}{2} \frac{P_k - P_{k+1}}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \sqrt{\nu_n + 1} \, (P_{\nu_n} - P_{\nu_n+2}) \frac{k+1}{2} (P_k - P_{k+1}) \sin\gamma \, d\gamma$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{\nu_n + 1} \frac{k+1}{2} \int_{-1}^{1} (P_{\nu_n}(x) - P_{\nu_n+2}(x))(P_k(x) - P_{k+1}(x)) dx.$$

Für $k = n^6$ fällt hier jedes Glied fort, mit Ausnahme des n-ten (weil j $\nu_n = n^6$ ist) und es ergibt sich

$$s_{n^6} = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6 + 1} \frac{n^6+1}{2} \int_{-1}^{1} (P_{n^6}(x) - P_{n^6+2}(x))(P_{n^6}(x) - P_{n^6+1}(x)) dx$$

$$= \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6 + 1} \frac{n^6+1}{2} \int_{-1}^{1} P_{n^6}^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^6 + 1} \frac{n^6+1}{2} \frac{2}{2n^6+1},$$

also

$$s_{n^6} > \frac{n}{2},$$

d. h.

$$\lim s_{n^6} = +\infty.$$

§ 2.

Die Summierung der Laplaceschen Reihe mit arithmetischen Mitteln

Bezeichnen wir mit $s_n\{f(\vartheta, \varphi)\}$ die n-te Partialsumme der zur Funk tion $f(\vartheta, \varphi)$ gehörigen Laplaceschen Reihe (L) und sei

$$s_n^{(1)}\{f(\vartheta, \varphi)\} = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n),$$

ferner

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \ldots + s_n^{(1)}).$$

Fejér hat bewiesen, daß, wenn die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ im Punkt (ϑ, φ) stetig ist, dann σ_n gegen den Funktionenwert daselbst konvergier Am Schluß seiner Arbeit wirft er ferner die Frage auf, ob es möglic

, daß im Falle einer stetigen Funktion die arithmetischen Mittel erster dnung divergieren. Nachdem Haar[8]) für einen speziellen Fall diese age erledigt hat, wurde die allgemeine Antwort von Gronwall[9]) geben, der folgendes Theorem bewiesen hat:

Es sei $f(\vartheta, \varphi)$ eine auf der Einheitskugel definierte, im Lebesgueschen Sinne integrable Funktion, die im Punkte (ϑ, φ) stetig ist. Dann nvergieren die arithmetischen Mittel erster Ordnung ihrer Laplaceschen Reihe gegen $f(\vartheta, \varphi)$.

In den folgenden Zeilen geben wir einen neuen, einfachen und kurzen weis dieses Gronwallschen Satzes[10]).

Wir können offenbar voraussetzen, daß der Punkt, in welchem die aplacesche Reihe untersucht wird, im Pole liegt. Es handelt sich alsnn um die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

ach der Christoffelschen Formel ist

$$s_n\{f\} = \frac{n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) \frac{P_n(\cos\gamma) - P_{n+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

enn wir also die Bezeichnung

$$\frac{1}{n+1}(P_0 + P_1(\cos\gamma) + \ldots + P_n(\cos\gamma)) = U_n(\cos\gamma)$$

nführen, folgt

$$s_n^{(1)}\{f\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \varphi) \frac{U_n(\cos\gamma) - P_{n+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

Andererseits ist

$$f(0,0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(0,0) \frac{U_n(\cos\gamma) - P_{n+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi,$$

h.

$$s_n^{(1)}\{f\} - f(0,0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (f(\gamma, \varphi) - f(0,0)) \frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma} \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

---

[8]) A. Haar, Über die Legendresche Reihe [Rendiconti del Circolo Matemao di Palermo 32 (1911), S. 132–142].

[9]) T. H. Gronwall, Über die Laplacesche Reihe [Mathematische Annalen 74 913), S. 213–270].

[10]) Vgl. auch F. Lukács, Sur la série de Laplace [Comptes Rendus 157 913), S. 632–634].

Nach einem bekannten Satz ist nun

$$|P_n(x)| \leqq 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{4}$$

und

$$|P_n(x)| < \frac{c_2}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{5}$$

Man hat somit nach (4)

$$|U_n| \leqq \frac{1+1+\ldots+1}{n+1} = 1$$

und nach (5)

$$|U_n| < \frac{1}{n+1} \frac{c_2}{\sqrt{\sin\gamma}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{c_3}{\sqrt{(n+1)\sin\gamma}},$$

also

$$\left|\frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma}\right| \leqq \frac{2}{1-\cos\gamma} \tag{6}$$

und

$$\left|\frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma}\right| < \frac{c_4}{\sqrt{(n+1)\sin\gamma\,(1-\cos\gamma)}}; \tag{7}$$

der fragliche Ausdruck ist ferner nichts anderes, als das arithmetische Mittel der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n$, deren n-te Partialsumme kleiner (nicht größer) ist als

$$1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2,$$

also hat man auch

$$\left|\frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma}\right| < (n+1)^2. \tag{8}$$

Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Zahl. Wir wollen $\delta = \delta(\varepsilon)$ derart bestimmen, daß

$$|f(\gamma,\varphi) - f(0,0)| < \varepsilon$$

sei für $0 \leqq \gamma \leqq \delta$ und außerdem

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(\gamma,\varphi) - f(0,0)| \sin\gamma\, d\gamma\, d\varphi < \varepsilon.$$

Da f im Pol stetig und auf der ganzen Kugel integrabel ist, so können diese Bedingungen stets erfüllt werden. Wir zerlegen nun in der Ungleichung

$$|s_n^{(1)}\{f\} - f(0,0)| \leqq \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(\gamma,\varphi) - f(0,0)| \left|\frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma}\right| \sin\gamma\, d\gamma\, d\varphi$$

das Integral rechter Hand in drei Teile. Im ersten sei $0 \leqq \gamma \leqq \delta$, im zweiten $\delta \leqq \gamma \leqq \pi - \delta$ und im dritten $\pi - \delta \leqq \gamma \leqq \pi$. Wir bezeichnen diese bzw. mit J_1, J_2, J_3.

Nach Wahl von δ ist

$$J_1 < \varepsilon \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \left| \frac{U_n(\cos\gamma) - P_{n+1}(\cos\gamma)}{1-\cos\gamma} \right| \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi$$

$$< \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{U_n - P_{n+1}}{1-\cos\gamma} \right| \sin\gamma \, d\gamma = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left| \frac{U_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x} \right| dx.$$

ch zerlege dieses Integral wieder in zwei Teile: von 0 bis $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ nd von hier bis 1. Mit Rücksicht auf (7) folgt ($x = \cos\gamma$, $\sqrt{1-x^2} = \sin\gamma$)

$$\left| \int_0^{1-\frac{1}{(n+1)^2}} \right| < \frac{c_4}{\sqrt{n+1}} \int_0^{1-\frac{1}{(n+1)^2}} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}\,(1-x)} < \frac{c_4}{\sqrt{n+1}} \int_0^{1-\frac{1}{(n+1)^2}} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \frac{c_4}{\sqrt{n+1}} \left[4 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} \right]_0^{1-\frac{1}{(n+1)^2}} < 4c_4$$

nd nach (8)

$$\left| \int_{1-\frac{1}{(n+1)^2}}^{1} \right| < \int_{1-\frac{1}{(n+1)^2}}^{1} (n+1)^2 \, dx = 1,$$

lso

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{2}(4c_4 + 1) = \varepsilon c_5.$$

In J_3 ist $\cos\gamma$ negativ, also

$$\frac{1}{1-\cos\gamma} < 1,$$

lso nach (6) und mit Rücksicht auf die Wahl von δ

$$J_3 < 2\varepsilon.$$

Für J_2 gilt endlich nach (7)

$$J_2 < \frac{1}{4\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \int_0^{2\pi} |f(\gamma,\varphi) - f(0,0)| \frac{c_4}{\sqrt{(n+1)\sin\gamma}\,(1-\cos\gamma)} \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi$$

$$< \frac{c_4}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{\sin\delta}\,(1-\cos\delta)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \int_0^{2\pi} |f(\gamma,\varphi) - f(0,0)| \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi;$$

etzt läßt sich $N = N(\delta) = N_1(\varepsilon)$ derart wählen, daß der Ausdruck auf er rechten Seite der letzten Ungleichung kleiner sei als ε, für $n > N$.

Indem wir die für J_1, J_2, J_3 gefundenen Abschätzungen zusammenassen, finden wir, daß es also zu jeder positiven ε eine Zahl N derart ibt, daß

$$|s_n^{(1)}\{f\} - f(0,0)| < \varepsilon(c_5 + 3),$$

wenn $n > N$ ist. D. h.

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(1)}\{f\} = f(0, 0),$$

w. z. b. w.

In diesem Beweise ist die Stetigkeit der Funktion bloß bei der Wahl von δ benutzt worden. Ist also f in einem Bereiche der Einheitskugel gleichmäßig stetig, so läßt sich δ, also auch N gemeinsam für alle Punkte eines beliebigen kleineren Bereiches wählen, d. h. *die arithmetischen Mittel erster Ordnung konvergieren dann gleichmäßig in jedem kleineren Bereiche gegen die Funktion.*

Man sieht auch, daß die Bedingung der Stetigkeit durch die allgemeinere ersetzt werden kann, daß

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(\gamma, \varphi) - f(0, 0)| \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi$$

existiere und gleich 0 sei.

§ 3.

Die arithmetischen Mittel k-ter Ordnung der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\gamma).$$

Es sei $x = \cos\gamma$ $(0 < \gamma < \pi)$ und

$$\frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}}$$

bezeichne das n-te arithmetische Mittel k-ter Ordnung der in der Überschrift genannten Reihe. Die Untersuchung dieser Ausdrücke bildet die Grundlage einer eingehenderen Behandlung der Laplaceschen Reihe, insbesondere ihrer Summierung mittels arithmetischer Mittel k-ter Ordnung[11]).

$S_n^{(k)}(x)$ ist laut Definition gleich dem Koeffizienten von z^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{(1-z)^{1+k}} \cdot \frac{1-z^2}{(1-2zx+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-z)^{1+k}} \cdot G(z, x).$$

Nach dem Residuumsatz ist

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int G(u, x) \frac{u^{1+k} \cdot u^n}{(u-1)^{1+k}} du = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u^{n+1+k}}{(u-1)^k} \cdot \frac{-(u+1)}{(1-2ux+u^2)^{\frac{1}{2}}} du,$$

[11]) Diese Ausdrücke sind (im Zusammenhang mit der Untersuchung der Summabilität beliebiger Ordnung der Fourierschen Reihe) schon von M. Riesz und Chapman untersucht worden; doch reichen ihre Resultate für meine Zwecke nicht aus.

bei das Integral in negativem Sinne über
ne geschlossene Kurve, welche die Punkte
$= e^{\gamma i}$, $\bar{\xi} = e^{-\gamma i}$ und 1 umschließt, erstreckt
(Fig. 1)[12]). Ist nun $k < 1$, so kann diese
urve durch den Punkt 1 durchgeführt werden.
erbei ist gleichgültig, welcher Zweig des Inte-
anden genommen wird. (Es kommen bei den
chfolgenden Abschätzungen ohnehin nur die
soluten Beträge in Betracht.)

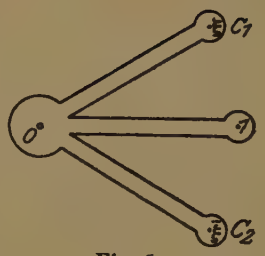

Fig. 1.

Es sei also $0 < k < 1$ und $\sin\gamma = \sqrt{1-x^2} \geqq \frac{4}{n+1}$; wir schlagen um ξ
d $\bar{\xi}$ die Kreise C_1 bzw. C_2 mit dem Radius $\frac{1}{n+1}$. Ihr Schnittpunkt
t 0ξ bzw. $0\bar{\xi}$ sei μ und $\bar{\mu}$, d. h.

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\xi, \qquad \bar{\mu} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\bar{\xi}.$$

Der Integrationsweg sei: Die Gerade 0μ, der Kreis C_1, die Geraden
), 01, die Geraden 10, $0\bar{\mu}$, der Kreis C_2 und die Gerade $\bar{\mu}0$.

Auf der Strecke 0μ ist ($|u| = t$):

$$|u^{n+1+k}| < 1, \quad |du| = dt, \quad |u-\xi| = 1-t, \quad |u-\bar{\xi}| > \sin\gamma = \sqrt{1-x^2},$$

$$|u-1| > \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, \quad |u+1| < 2,$$

ıo

$$\left|\int_{0\mu}\right| < \left(\sqrt{\frac{2}{1-x}}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{3}{2}} 2\int_0^{1-\frac{1}{n+1}} \frac{dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}.$$

as Integral rechter Hand hat den Wert $\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}-1)$, d. h.

$$\left|\int_{0\mu}\right| < \frac{c_6\sqrt{n+1}}{(1-x)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}}.$$

nliches gilt für $0\bar{\mu}$.

Auf C_1 ist

$$|u-\xi| = \frac{1}{n+1}, \qquad |u-\bar{\xi}| > \sin\gamma = \sqrt{1-x^2},$$

$$|u^{n+1+k}| \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+k} < 4, \qquad |u+1| < 3,$$

$$|u-1| \geqq 2\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{n+1} \geqq \sqrt{2}\sqrt{1-x} - \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-x},$$

[12]) Vgl. J. T. Stieltjes, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1) 4
890), G. 1–17.

also

$$\left|\int_{C_1}\right| < \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{3}{2}} (n+1)^{\frac{3}{2}} 3\cdot 4 \cdot \int_{C_1} |du| < \frac{c_7\sqrt{n+1}}{(1-x)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}}.$$

Ähnlich für C_2.

Auf der Strecke 01 ist endlich

$$\frac{1-u}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \frac{1-u}{|u-\xi|} < 1,^{13}) \qquad |u-\xi| = |u-\bar{\xi}| \geqq \sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

$$u^{n+k+1} \leqq 1, \qquad u+1 \leqq 2.$$

Zerlegt man das entsprechende Integral in zwei Teile: der eine von 0 bis $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$, der andere von hier bis 1 erstreckt, so ist der erste Teil kleiner als

$$\int_0^{1-\frac{1}{n+1}} \frac{1}{(1-u)^{1+\frac{k}{2}}} \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-2ux+u^2}}\right)^{1-\frac{k}{2}} \frac{2\,du}{(1-2ux+u^2)^{1+\frac{k}{4}}} < 2\left(\frac{2}{1-x}\right)^{1+\frac{k}{4}} \cdot$$

$$\int_0^{1-\frac{1}{n+1}} \frac{du}{(1-u)^{1+\frac{k}{2}}} < \frac{c_8 (n+1)^{\frac{k}{2}}}{(1-x)^{1+\frac{k}{4}}},$$

und der zweite Teil ist kleiner als

$$\int_{-\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{1}{(1-u)^k} \frac{2\,du}{(1-2ux+u^2)^{\frac{3}{4}}} < \left(\frac{2}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot \int_{1-\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{du}{(1-u)^k} < \frac{c_9}{(1-x)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-k}.$$

Alles zusammenfassend und bezugnehmend auf

$$\binom{n+k}{n} > c_{10}(n+1)^k$$

erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$(9) \qquad \left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}}\right| < c_{11}\left(\frac{1}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1-x)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1+\frac{k}{4}}} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{4}}}\right) \left(0 < k < 1;\ \sqrt{1-x^2} \geqq \frac{4}{n+1}\right).$$

Andererseits hat man, da die n-te Partialsumme unserer Reihe absolut nicht größer als

$$1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$$

[13]) Für $x > 0$. Ist $x < 0$, so ist offenbar das ganze Integral über 01 kleiner als eine von n und x unabhängige Konstante.

, die folgende Ungleichung:

$$0) \qquad \left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}} \right| \leqq (n+1)^2 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ k \geqq 0).$$

Bemerkung. Ist x negativ ($\geqq -1$), so ist nach der Christoffel-hen Formel die n-te Partialsumme kleiner als $2(n+1)$, es gilt also dasselbe r das n-te arithmetische Mittel k-ter Ordnung. Es sei nun $x < 0$ und $\sqrt{1-x^2} < \frac{4}{n+1}$; dann ist $\sqrt{1+x} < \frac{4}{n+1}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{4}{n+1}\right)^{\frac{2}{2}}$, d. h. der usdruck rechter Hand in (9) hat die Größenordnung $(n+1)^{\frac{1}{2}-(k-\frac{1}{2})}$ $= (n+1)^{2-k}$, übertrifft also für genügend große n den Wert $2(n+1)$, h. auch die linke Seite; (9) gilt also auch für solche negative x, für elche $\sqrt{1-x^2} < \frac{4}{n+1}$ ist, sobald n (von x unabhängig) genügend groß ewählt wird.

§ 4.

Die arithmetischen Mittel k-ter Ordnung der Laplaceschen Reihe.

Auf Grund der Resultate des vorigen Paragraphen ist es nicht schwer, en folgenden Satz zu beweisen:

Wenn $f(\vartheta, \varphi)$ eine auf der Einheitskugel im Lebesgueschen Sinne tegrable Funktion ist, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. *sie ist stetig im Punkte (ϑ_0, φ_0);*
2. *die Funktion*

$$\frac{f(\vartheta, \varphi) - f(\vartheta_0, \varphi_0)}{(1+\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

obei γ die sphärische Distanz der beiden Punkte (ϑ, φ), (ϑ_0, φ_0) be-ichnet) ist integrabel, dann ist die Laplacesche Reihe von $f(\vartheta, \varphi)$ ummierbar von der Ordnung $k > \frac{1}{2}$ im Punkte (ϑ_0, φ_0) und ihre Summe t gleich $f(\vartheta_0, \varphi_0)$.[14])

Wie wir sehen, enthält die Bedingung 2. nur im Gegenpol[15]) von $_0, \varphi_0)$ eine Einschränkung für unsere Funktion, und sie ist z. B. stets füllt, wenn dort f beschränkt ist oder derart unendlich wird, daß sie

[14]) Dieses Theorem rührt von Gronwall her und wurde (unter etwas allgemeineren Bedingungen) in seiner Arbeit: Über die Summierbarkeit der Reihen von aplace und Legendre [Mathematische Annalen 75 (1914), S. 321–375] bewiesen.

[15]) Am Schluß seiner C. R.-Note hat Lukács die Gegenpolbedingung 2. nicht geführt, was von Herrn Gronwall [Comptes Rendus 158 (1914), S. 1488–1490] it Recht beanstandet wurde. Aus der vorliegenden Originalarbeit ist aber ersichtlich, ß es sich in der C. R.-Note von Lukács nur um eine ungenaue Formulierung ndelt. [Anmerkung des Übersetzers.]

mit einer Potenz von $1+\cos\gamma$, die kleiner ist als $\frac{1}{4}$, multipliziert, beschränkt bleibt.

Es sei also $\frac{1}{2}<k<1$. Wie in § 2, so können wir auch hier ohne Schaden der Allgemeinheit voraussetzen, daß (ϑ_0, φ_0) im Pol liegt. Dann ist das n-te arithmetische Mittel k-ter Ordnung gleich

$$s_n^{(k)}\{f\}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma,\varphi)\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi;$$

anderseits (vgl. § 2)

$$f(0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(0,0)\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi,$$

also

$$s_n^{(k)}\{f\}-f(0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\gamma,\varphi)-f(0,0))\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi.$$

Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Zahl und $\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{\pi}{3}$ so klein, daß

$$|f(\gamma,\varphi)-f(0,0)|<\varepsilon$$

sei für $0\leqq\gamma\leqq\delta$, was auf Grund der Bedingung 1. stets möglich ist. Wir zerlegen in der Ungleichung

$$|s_n^{(k)}\{f\}-f(0,0)|\leqq\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\gamma,\varphi)-f(0,0)|\left|\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\right|\cdot\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi$$

das Integral rechter Hand in zwei Teile. Im ersten sei $0\leqq\gamma\leqq\delta$, im zweiten $\delta\leqq\gamma\leqq\pi$. Der erste Teil ist mit Rücksicht auf die Wahl von δ kleiner als

$$\varepsilon\cdot\frac{1}{4\pi}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\right|\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi<\varepsilon\cdot\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_n^{(k)}(\cos\gamma)}{\binom{n+k}{n}}\right|\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{\binom{n+k}{n}}\right|dx$$

Es sei $n\geqq 5$. Das letzte Integral zerlegen wir wiederum in zwei Teile: von $\frac{1}{2}$ bis $\left(1-\left(\frac{4}{n+1}\right)^2\right)$ und von hier bis 1. Im ersten Teile ist

$$\sqrt{1-x^2}>\sqrt{1-x}\geqq\frac{4}{n+1},$$

h. (9) ist anwendbar. Dieser Teil ist also kleiner als

$$c_{11}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\left(\frac{4}{n+1}\right)^2}\left(\frac{1}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{(n+1)^{\frac{k}{2}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{1+\frac{k}{4}}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\right)dx<c_{12},$$

a hier $1+x>1$ ist. Der zweite Teil ist nach (10) kleiner als

$$\int_{1-\left(\frac{4}{n+1}\right)^2}^{1}(n+1)^2\,dx=16.$$

. h. der gesamte Teil $0\leqq\gamma\leqq\delta$ ist kleiner als $\varepsilon(c_{12}+16)$.

Für den Teil $\delta\leqq\gamma\leqq\pi$ können wir wiederum die Gleichung (9) anenden, die laut der obigen Bemerkung für genügend große n im ganzen ntegrationsintervall gilt. Es ist $1-x=1-\cos\gamma\geqq 1-\cos\delta$, d. h. dieser eil ist kleiner als

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\delta}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\,\frac{|f(\gamma,\varphi)-f(0,0)|}{(1+\cos\gamma)^{\frac{3}{4}}}\,\frac{1}{(1-\cos\delta)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi$$

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{k}{2}}}\,\frac{1}{(1-\cos\delta)^{1+\frac{k}{4}}}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-\cos\delta)^{\frac{3}{2}}}\right)|f(\gamma,\varphi)-f(0,0)|\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi\Big\},$$

nd dies ist für $k>\frac{1}{2}$ laut der Bedingung 2. kleiner als ε, sobald $>N=N(\delta)=N_1(\varepsilon)$ ist.

Alles zusammenfassend ergibt sich

$$|s_n^{(k)}\{f\}-f(0,0)|<\varepsilon(c_{12}+17)$$

ir $n>N$. Damit ist unser Satz bewiesen. Wir können sogar hinzuügen, daß, wenn die Bedingungen 1. und 2. in einem Bereiche der Einheitsugel gleichmäßig erfüllt sind, so *konvergieren in einem kleineren Bereiche ie Summen* $s_n^{(k)}\{f\}$ *gleichmäßig gegen* f, — ferner auch, daß 1. durch ne allgemeinere Bedingung ersetzt werden kann.

Zum Schluß zeige ich, daß, *wenn* $k<\frac{1}{2}$, *es stets eine auf der Eineitskugel stetige Funktion gibt, deren Laplacesche Reihe im Pol von er Ordnung* k *nicht summierbar ist.*

Betrachten wir nämlich die in § 1 definierten Funktionen $f_\nu(\gamma)$. Wir wählen die ganze Zahl α derart, daß $\alpha(\frac{1}{2}-k)-2 \geqq 1$ sei, und setzen $\nu_n = n^\alpha$. Die Reihe

$$\Phi(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\nu_n}(\gamma)}{n^2}$$

ist dann gleichmäßig konvergent, also $\Phi(\gamma)$ stetig. Doch divergieren ihre arithmetischen Mittel k-ter Ordnung im Pole. In der Tat kann eine Reihe nur dann summierbar k-ter Ordnung sein, wenn die n-te Partialsumme dividiert durch n^k beschränkt bleibt. In unserem Falle erhalten wir genau so wie im § 1

$$s_{n^\alpha} = \frac{1}{n^2}\sqrt{n^\alpha+1}\cdot\frac{n^\alpha+1}{2}\cdot\frac{2}{2n^\alpha+1} > \frac{1}{2}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-2},$$

also

$$\frac{s_{n^\alpha}}{(n^\alpha)^k} > \frac{1}{2}\, n^{\alpha\left(\frac{1}{2}-k\right)-2} \geqq \frac{n}{2},$$

d. h. $\frac{s_n}{n^k}$ bleibt nicht beschränkt für alle n.[16])

---

[16]) In den nachgelassenen Aufzeichnungen von Lukács findet sich das folgende überaus einfache Beispiel für eine Funktion $f(\vartheta, \varphi)$, welche die im Text angegebene Eigenschaft besitzt.

„Wegen (2) ist die Reihe

$$f(\vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^2}\left(P_{n!}(\cos\vartheta) - P_{n!+2}(\cos\vartheta)\right)$$

absolut und gleichmäßig konvergent für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, stellt also dort eine stetige Funktion $f(\vartheta)$ dar, für die $f(0) = f(\pi) = 0$ ist. Die Laplacesche Reihe von $f(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta)$ lautet:

$$0 + 0 + \frac{\sqrt{2!}}{2^2}P_2(\cos\vartheta) + 0 - \frac{\sqrt{2!}}{2^2}P_4(\cos\vartheta) + 0 + \frac{\sqrt{8!}}{3^2}P_6(\cos\vartheta) + 0 - \frac{\sqrt{8!}}{3^2}P_8(\cos\vartheta) + \ldots$$

Diese Reihe ist für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ *divergent und für keine* $k < \frac{1}{4}$ *summierbar* (C, k). Sonst müßte nämlich das ν-te Glied $O(\nu^k)$ sein; nun ist das ν-te Glied für $\nu = n!$ ($\vartheta = 0$ oder π) gleich

$$\frac{\sqrt{n!}}{n^2},$$

was durch $\nu^k = (n!)^k$ dividiert noch immer unendlich wird. (Ende 1916.)“ [Anmerkung des Übersetzers.]

(Eingegangen am 1. November 1921.)

Die Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen hyperkomplexer Größen in unzerlegbare Faktoren.

Von

Friedrich Mittelsten Scheid in Göttingen.

Einleitung.

In seiner Dissertation (Über homogene kommutative Gruppen hyperplexer Größen und ihre Zerlegung in unzerlegbare Faktoren, Göttgen 1917) beweist Herr Schmeidler den Satz: Ist eine irreduzible nogene kommutative Gruppe auf zwei verschiedene Arten als Produkt unzerlegbaren Gruppen darstellbar, so ist jeder Faktor der einen Zerung einem Faktor der andern Zerlegung isomorph. — Die vorliegende beit erweitert diesen Satz in zweifacher Hinsicht: Die Bedingung der mmutativität wird durch eine allgemeinere ersetzt, die der Homogenität t fort. Der Betrachtung liegen diejenigen Gruppen zugrunde, deren rakteristische Gleichungen in Linearfaktoren zerfallen; in Anlehnung S. Lie bezeichne ich sie als integrabel. Sie enthalten die kommutaen Gruppen als Spezialfall, denn für diese können die (hier zusammenenden) charakteristischen Gleichungen auf die Form gebracht werden:

$$(x_1 - \omega)^m = 0,$$

er m die Ordnung der Gruppe verstanden.

Die Schmeidlerschen Untersuchungen lassen sich fast wörtlich auf nichtkommutativen Gruppen übertragen, deren charakteristische Gleiungen sich ebenfalls auf diese Gestalt bringen lassen. In dem allgeineren Falle, in dem die charakteristischen Gleichungen so geschrieben den können, daß in ihnen die Potenzen von $h > 1$ verschiedenen Lineartoren auftreten, mußte der von Herrn Scheffers eingeführte Begriff Charakters einer Größe herangezogen und gezeigt werden, daß die von rn Schmeidler zum Studium der kommutativen Gruppen geprägten griffe auch dann noch einen Sinn haben und einen tieferen Einblick in

die Struktur der integrablen Gruppen gewähren, wenn die benutzten Größen von bestimmtem Charakter sind. Aber selbst wenn man sich auf homogene integrable Gruppen beschränken wollte, so genügen die für kommutative Gruppen ausreichenden Hilfsmittel nicht, um den Zerlegungssatz zu beweisen. Hierzu bedarf es der Einführung eines neuen Begriffs, des der unmittelbaren Verkoppelung zweier Partialeinheiten. Mit seiner Hilfe läßt sich hinreichend übersehen, wie bei zwei Zerlegungen einer Gruppe die Größen eines Faktors der einen Zerlegung den Größen aus Faktoren der andern Zerlegung zugeordnet sind. Eine Spezialisierung der primitiven vollen Hauptsysteme erster Dimension ermöglicht diesen Überblick. Für homogene integrable Gruppen würde es dann nur noch des Nachweises bedürfen, daß jeder Faktor einer homogenen Gruppe wieder homogen ist, und daß es homogene primitive volle Hauptsysteme erster Dimension von der gewünschten speziellen Gestalt gibt. Auf die Wiedergabe der diesbezüglichen Sätze habe ich in der vorliegenden Darstellung verzichtet, weil ich den Zerlegungssatz in einer allgemeineren Fassung bewiesen habe, die auch für inhomogene Gruppen gilt. Dieser Beweis gelang durch eine weiter gehende Spezialisierung der primitiven vollen Hauptsysteme erster Dimension, die nicht nur in den homogenen, sondern in allen integrablen Gruppen möglich ist.

In einem kurzen Anhang weise ich darauf hin, wie das Ergebnis auf die nicht-integrablen Gruppen zu übertragen ist.

§ 1.

Einteilung der Gruppen hyperkomplexer Größen.

Eine Charakterisierung derjenigen Gruppen hyperkomplexer Größen, die den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden, kann man auf verschiedenen Wegen gewinnen[1]).

Einen geeigneten Ausgangspunkt bieten die charakteristischen Gleichungen der Gruppe dar.

Die Gruppe der endlichen Ordnung $m > 0$ sei gegeben durch das Multiplikationsschema

$$e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma,$$

wo die $e_\varkappa$ linear unabhängige Einheiten sind.

Dabei genügen die komplexen Konstanten $a_{\alpha\beta\gamma}$ den bekannten Be-

[1]) Vergleiche Cartan, Encyclopédie des Sciences Mathématiques ..., I, 1 S. 480.

gungen, die aus dem assoziativen Gesetz der Multiplikation folgen. ne beliebige hyperkomplexe Größe dieser Gruppe sei

$$x = \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha e_\alpha,$$

die x_α komplexe Variable sind. Bedeutet ω eine komplexe Variable, ist

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{für } \mu = \nu, \end{cases}$$

d setzt man noch die Matrizen m-ten Grades

$$(a_{\alpha\beta\gamma}) = E_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

sind

$$f(\omega) = \left| \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} - \omega \delta_\beta^\gamma \right| = \left| \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha x_\alpha - \omega \delta_\beta^\gamma \right| = 0$$

d

$$g(\omega) = \left| \sum_{\beta=1}^{m} x_\beta a_{\alpha\beta\gamma} - \omega \delta_\alpha^\gamma \right| = 0$$

charakteristischen Gleichungen der Gruppe.

Verschwindet eine der beiden identisch in den x_α, so heißt die zuge- rige Gruppe — nach Herrn Scheffers — ausgeartet. Sie besitzt keine upteinheit, d. h. keine Größe E, für die gleichzeitig die beiden Glei- ungen bestehen:

$$xE = x; \qquad Ex = x,$$

ntisch in allen Größen x der Gruppe.

Einen Spezialfall dieser ausgearteten Gruppen bilden die Wurzelgruppen. de Größe x einer Wurzelgruppe ist eine Wurzel der Null, d. h. es läßt h zu ihr eine positive ganze Zahl l bestimmen, so daß $x^l = 0$ ist. Ver- wwindet keine der charakteristischen Gleichungen identisch, so besitzt Gruppe stets eine und nur eine Haupteinheit. Dies sei im folgenden ts vorausgesetzt, wenn von Gruppen schlechtweg die Rede ist.

Um eine Einteilung dieser Gruppen zu erhalten, betrachten wir den rper $P(x_1, \ldots, x_m)$ aller komplexen Zahlen und der komplexen Variablen $\ldots, x_m$ und zerlegen die Gleichungen (2) und (3) in die in $P(x_\alpha)$ ir- luziblen Faktoren. Dann zerfallen die beiden Gleichungen entweder ichzeitig in Linearfaktoren, oder sie besitzen beide mindestens einen in irreduziblen Faktor, dessen Grad $\geqq 2$ ist. Man zeigt auch leicht, daß se Eigenschaft nur von der Gruppe, nicht aber von der speziellen Basis d den aus ihr hergeleiteten charakteristischen Gleichungen abhängt. Im eiten Falle lassen sich in der Gruppe stets 4 Einheiten bestimmen, die

ein Hamiltonsches Quaternionensystem bilden, während dies im ersten Falle nicht möglich ist. Deshalb nennt Herr Scheffers die Gruppen der zweiten Klasse Quaternionensysteme, die der ersten Nicht-Quaternionsysteme. Deutet man die Gruppen hyperkomplexer Größen als Transformationsgruppen, und wendet man auf sie die von Lie-Engel eingeführte Einteilung der Transformationsgruppen an, so sind die Nicht-Quaternionsysteme als integrable, die Quaternionsysteme als nicht-integrable Gruppen hyperkomplexer Größen zu bezeichnen.

Für die integrablen Gruppen gilt nun der

Satz I[2]). *In einer integrablen Gruppe lassen sich die m Einheiten so wählen, daß gilt:*

1. *für die Einheiten*

$$e_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h; \quad 1 \leqq h \leqq m)$$

$$e_\alpha^2 = e_\alpha \tag{5}$$

und, falls $h > 1$:

$$e_\alpha e_\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, h; \quad \alpha \neq \beta) \tag{6}$$

Einheiten, die den Gleichungen (5) *und* (6) *genügen, sollen als Partialeinheiten, ihre Gesamtheit als ein volles System von Partialeinheiten bezeichnet werden. Wenn im Falle* $h = 1$ *von einem vollen System von Partialeinheiten die Rede ist, soll darunter die Haupteinheit verstanden werden.*

2. *Zu jeder Einheit*

$$e_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, m$$

gibt es zwei nicht notwendig voneinander verschiedene Partialeinheiten e_α, e_β, *so daß*

$$e_\alpha e_\varrho = e_\varrho e_\beta = e_\varrho$$

ist, während für $\alpha \neq \gamma$, $\gamma \leqq h$ *und* $\beta \neq \delta$, $\delta \leqq h$

$$e_\gamma e_\varrho = e_\varrho e_\gamma = 0$$

ist. Man sagt dann nach Scheffers: e_ϱ *ist vom Charakter* $(\alpha; \beta)$. *(Die Partialeinheiten* e_α *sind also vom Charakter* (α, α)*).*

3. *Ist* $h < m$, *so hängt für alle* ϱ, σ, *für die*

$$h < \varrho \leqq m; \qquad h < \sigma \leqq m$$

ist, $e_\varrho e_\sigma$ *höchstens von denjenigen* e_τ *ab, für die* τ *größer ist als die größere der beiden Zahlen* ϱ *und* σ.

Eine gemäß diesen drei Bedingungen gewählte Basis heißt Normalbasis.

---

[2]) Scheffers, Mathematische Annalen **39** (1891), S. 310; Cartan, Ann. Fac. sc. Toulouse 12 (1898), mém. Nr. 2, S. 20.

Legt man eine Normalbasis zugrunde, so werden also die Konstanten
$_{\gamma}$ Null, sobald $\beta > \gamma$. Für $\beta = \gamma$ dagegen werden sie $= 1$, wenn e_β
einem Charakter $(\alpha; \lambda)$ ist, sonst $= 0$. Das bedeutet aber, daß in
Matrizen (1) unterhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen, in dieser
Werte 0 oder 1 stehen. Ist $\alpha > h$, so steht in der Hauptdiagonale
E_α überall 0. Ist dagegen $\alpha \leqq h$, so steht in der ϱ-ten Zeile in der
uptdiagonale eine 1 dann und nur dann, wenn e_ϱ von einem Charakter
λ) ist. Da endlich jedes e_ϱ nach Satz I einen bestimmten Charakter
, so nimmt die charakteristische Gleichung (2) die Form an:

$$f(\omega) = (x_1 - \omega)^{m_1} \cdot (x_2 - \omega)^{m_2} \dots (x_h - \omega)^{m_h} = 0,$$

die m_α positive ganze Zahlen sind, für die gilt:

$$\sum_{\alpha=1}^{h} m_\alpha = m.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß jede Gruppe, für die sich eine Normal-
is dieser Gestalt wählen läßt, integrabel ist, da die Gleichung (2a) in
earfaktoren zerfällt.

§ 2.

Das Produkt zweier Gruppen.

Mit Hilfe der angegebenen Definitionen und Sätze läßt sich zeigen,
aus der Zugehörigkeit eines Produktes zu einer der angeführten Klassen
r die Natur seiner Faktoren allgemein ausgesagt werden kann.

Gegeben seien zwei Gruppen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, der Ordnungen m und n.
bei sollen zunächst auch ausgeartete Gruppen zugelassen sein. Das
ltiplikationsgesetz der Einheiten e_α von $\mathfrak{A}$ sei

$$e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, m),$$

jenige der Einheiten $f_\varkappa$ von $\mathfrak{B}$ sei

$$f_\varkappa f_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} b_{\varkappa\lambda\mu} f_\mu \qquad (\varkappa, \lambda = 1, \dots, n).$$

nn befolgen die Einheiten

$$e_{\alpha\varkappa} = e_\alpha f_\varkappa = f_\varkappa e_\alpha$$

Produktes das Multiplikationsgesetz:

$$e_{\alpha\varkappa} e_{\beta\lambda} = \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\alpha\varkappa\beta\lambda\gamma\mu} e_{\gamma\mu} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, m;\ \varkappa, \lambda = 1, \dots, n),$$

wo noch

$$c_{\alpha\varkappa\beta\lambda\gamma\mu} = a_{\alpha\beta\gamma} b_{\varkappa\lambda\mu}$$

ist. Die so definierten Einheiten bilden eine Gruppe[3]). Aus der Defini tion ergibt sich unmittelbar

Satz II. *Besitzen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *eine Haupteinheit, so enthält auc das Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *eine Haupteinheit, und diese ist gleich dem Produ der Haupteinheiten von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$[4]).

Es gilt auch umgekehrt

Satz III. *Hat das Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *eine Haupteinheit, so besitz auch jeder der Faktoren eine Haupteinheit.*

Beweis. E sei die Haupteinheit von $\mathfrak{G}$. Angenommen, $\mathfrak{A}$ besäß keine Haupteinheit. Dann füge ich zu $\mathfrak{A}$ eine Einheit E_1 hinzu, die de Bedingungen der Haupteinheit genügt:

$$E_1 A = A E_1 = A$$

für jede Größe A aus $\mathfrak{A}$. Dadurch wird $\mathfrak{A}$ zu einer Gruppe $\mathfrak{A}'$ mi Haupteinheit erweitert[5]). Hat auch $\mathfrak{B}$ keine Haupteinheit, so erweiter ich $\mathfrak{B}$ in der gleichen Weise zu $\mathfrak{B}'$. Besitzt dagegen $\mathfrak{B}$ eine Haupteinheit so bezeichne ich $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}'$. Die Haupteinheit von $\mathfrak{B}'$ sei F_1. Dann is nach Satz II

$$E_1 F_1 = E_{11}$$

die Haupteinheit der Gruppe $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$. E_{11} ist gewiß nicht in de Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}'$ enthalten, da E_1 nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Dan bilden die Größen von $\mathfrak{G}$ zusammen mit E_{11}, wie man sich leicht übe zeugt, eine Untergruppe $\mathfrak{G}''$ von $\mathfrak{G}'$, die die Größen E_{11} und E zu Haupt einheiten besitzen müßte. Wenn aber eine Gruppe überhaupt eine Haupt einheit besitzt, so ist diese eindeutig. Also hatten bereits $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beid je eine Haupteinheit.

Aus Satz II und Satz III folgt

Satz IV. *Ein Produkt ist dann und nur dann ausgeartet, wen mindestens einer der Faktoren es ist.*

Satz V. *Besitzen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *eine Haupteinheit, und ist einer d Faktoren nicht-integrabel, so ist auch das Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *eine nich integrable Gruppe.*

Beweis. Nach Satz III besitzt $\mathfrak{G}$ eine Haupteinheit. Ist nun eine nicht-integrable Gruppe, so lassen sich darin vier Einheiten wähle

---

[3]) Scheffers, Mathematische Annalen 39 (1891), S. 324.

[4]) Scheffers, a. a. O. [3]).

[5]) Frobenius, Sitzungsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaft (1903), S. 636.

ein Hamiltonsches Quaternionensystem bilden. Sie seien $f_1, \ldots, f_4$. e_1 die Haupteinheit von $\mathfrak{A}$, so bilden, wie sich unmittelbar ergibt, Einheiten

$$e_{11} = e_1 f_1, \ldots, e_{14} = e_1 f_4$$

Hamiltonsches Quaternionensystem in $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{G}$ eine nicht-egrable Gruppe[6]).

Satz IV und Satz V ergeben

Satz VI. *Jeder Faktor einer integrablen Gruppe ist selbst integrabel.*

Endlich läßt sich auch leicht die Umkehrung dieses Satzes zeigen:

Satz VII. *Das Produkt zweier integrabler Gruppen ist wieder egrabel.*

Beweis. Wählt man in dem Produkt die Reihenfolge der $e_{\alpha\varkappa}$ derart, $e_{\beta\lambda}$ hinter $e_{\alpha\varkappa}$ steht,

1. wenn $\beta > \alpha$,
2. für $\beta = \alpha$, wenn $\lambda > \varkappa$,

n erhält man die Matrix

$$E_{\alpha\varkappa} = (c_{\alpha\varkappa\beta\lambda\gamma\mu}) = (a_{\alpha\beta\gamma} b_{\varkappa\lambda\mu}),$$

em man in der Matrix

$$E_\alpha = (a_{\alpha\beta\gamma})$$

es Element $a_{\alpha\beta\gamma}$ durch die mit diesem Element multiplizierte Matrix

$$F_\varkappa = (b_{\varkappa\lambda\mu})$$

etzt. Da nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ integrabel sind, kann man die Einheiten e_α d $f_\varkappa$ gemäß den Bedingungen des Satzes I gewählt denken. Dann ent-ten die Matrizen E_α und $F_\varkappa$ unterhalb der Hauptdiagonale lauter llen. Folglich gilt das gleiche von den Matrizen $E_{\alpha\varkappa}$. Daher reduziert h die erste der beiden charakteristischen Gleichungen von $\mathfrak{G}$ auf das agonalglied, zerfällt also, da sie nach Satz II nicht identisch ver-windet, in Linearfaktoren, w. z. b. w.

Aus Satz V und Satz VII folgt

Satz VIII. *Die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann nicht-egrabel, wenn mindestens einer ihrer Faktoren nicht-integrabel ist.*

Anmerkung. Wenn die charakteristische Gleichung

$$f(\omega) = \left| \sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha - \omega \delta_\beta^\gamma \right| = 0$$

[6]) Vgl. die Anmerkung am Ende des Paragraphen.

in Linearfaktoren zerfällt, so gilt offenbar dasselbe von der Gruppendeterminante

$$|S(x)| = \left| \sum a_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha \right|.$$

Es läßt sich aber auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen. Man gelangt daher zu der gleichen Einteilung der Gruppen, wenn man statt von der charakteristischen Gleichung von der Gruppendeterminante ausgeht. Dann läßt sich, wie Herr Schmeidler die Freundlichkeit hatte mir mitzuteilen, der Satz V auch ohne den Satz von der Existenz eines Hamiltonschen Quaternionensystems in einer nicht-integrablen Gruppe beweisen:

Hilfssatz von Kronecker. *Ist*

$$A = (a_{\beta\gamma})$$

eine Matrix m-ter Ordnung,

$$B = (b_{\lambda\mu})$$

eine Matrix n-ter Ordnung, so ist die Determinante der Matrix m·n-ter Ordnung

$$C = (a_{\beta\gamma} b_{\lambda\mu})$$

gleich

$$|C| = |A|^n \cdot |B|^m.$$

(Vgl. Pascal, Die Determinanten, S. 107—109.)

Es seien nun

$$|S(x)| = \left| \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha \right|$$

und

$$|T(y)| = \left| \sum_{\varkappa} b_{\varkappa\lambda\mu} y_\varkappa \right|$$

die Gruppendeterminanten der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und es sei etwa $\mathfrak{A}$ nicht-integrabel, so daß $|S(x)|$ einen irreduziblen Faktor von einem Grade $p \geqq 2$ besitzt. Die Gruppendeterminante von $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist dann

$$|R(z)| = \left| \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\alpha\beta\gamma} b_{\varkappa\lambda\mu} z_{\alpha\varkappa} \right|.$$

Setze ich hierin

$$z_{\alpha\varkappa} = x_\alpha y_\varkappa,$$

so wird

$$|R(z)| = \left| \sum_{\alpha=1}^{m} a_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha \cdot \sum_{\varkappa=1}^{n} b_{\varkappa\lambda\mu} y_\varkappa \right| = |S(x)|^n \cdot |T(y)|^m.$$

Da die Determinante also sogar für die spezielleren Werte $z_{\alpha\varkappa} = x_\alpha y_\varkappa$ irreduzible Faktoren höheren als 1. Grades enthält, so ist dies sicher auch für unbestimmte $z_{\alpha\varkappa}$ der Fall. $\mathfrak{G}$ ist also nicht-integrabel.

§ 3.

Die Invarianten einer integrablen Gruppe.

Um die Faktoren einer integrablen Gruppe eingehender studieren zu nnen, betrachte ich ihre Invarianten. Vorweg bemerke ich, daß ich, triviale Fälle auszuschließen, stets annehmen kann, daß nicht nur zugrunde gelegte Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern auch ihre Faktoren von Null rschiedene Wurzeln der Null besitzen. Enthält nämlich eine Gruppe ne Wurzel der Null, so besteht sie entweder nur aus der Haupteinheit, er sie ist eine kommutative Dedekindsche Gruppe, d. h. eine Gruppe, sich aus $h > 1$ Partialeinheiten zusammensetzen läßt, die den Gleiungen (5) und (6) genügen. Eine derartige Gruppe ist offenbar reduel. Sie besteht nämlich aus den h irreduziblen Summanden der Ordng 1. Besitzt also in einer Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein Faktor, etwa $\mathfrak{A}$, ine von Null verschiedene Wurzel der Null, so handelt es sich entweder die triviale Zerlegung $\mathfrak{G} = E\mathfrak{G}$, wo E die Haupteinheit ist, oder $\mathfrak{A}$ und folglich auch $\mathfrak{G}$ (vgl. Satz XXI) — ist reduzibel. Beschränkt an sich also auf nicht-triviale Zerlegungen irreduzibler Gruppen, wie s beim Beweise des Zerlegungssatzes geschehen soll, so besitzt jeder ktor, und, wie sich daraus ergibt, auch die Gruppe selbst, mindestens ne Wurzel der Null.

Anmerkung. Ist der Zerlegungssatz erst für irreduzible integrable ruppen bewiesen, so kann er mit Hilfe des Satzes von der eindeutigen rlegung einer Gruppe in irreduzible Summanden auch auf solche redublen integrablen Gruppen erweitert werden, bei denen ein Faktor irrezibel, der andere — komplementäre — eine kommutative Dedekindhe Gruppe ist. Doch gehe ich auf diese einfache Erweiterung nicht n, sondern halte an der angegebenen Beschränkung fest.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich die invariante Ordnung $m > 0$ r integrablen Gruppe stets als Summe zweier gleichfalls positiver Invanten schreiben:

$$m = h + l.$$

Dabei ist l die maximale Anzahl der voneinander linear unabhängigen urzeln der Null, h die Anzahl der Partialeinheiten eines vollen Systems.

Aus der Definition der Partialeinheiten ergibt sich leicht der

Satz IX. *Sind*

$$e_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

nd

$$e'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

zwei volle Systeme von Partialeinheiten ein und derselben Gruppe, so bestehen bei geeigneter Numerierung die Gleichungen

$$e'_\alpha = e_\alpha + \eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h), \tag{11}$$

wo die η_α Wurzeln der Null bedeuten[7]).

Die Zahl l läßt sich nun auf h^2 Invarianten $N_{\alpha\beta}$ zurückführen[8]):

$$l = \sum_{\alpha,\beta=1}^{h} N_{\alpha\beta}.$$

Dabei gibt $N_{\alpha\beta}$ die Zahl der voneinander linear unabhängigen Wurzeln der Null vom Charakter $(\alpha;\beta)$ an. Für kommutative Gruppen ist $h=1$, folglich wird dort

$$N_{11} = l = m - 1.$$

Für diesen Fall hat Herr Schmeidler eine andere Zerlegung von l in Invarianten angegeben:

$$l = \sum_{\mu} r_\mu,$$

wo r_μ die Anzahl der Größen eines vollen Hauptsystems μ-ter Dimension bezeichnet[9]). Die von ihm eingeführten Begriffe der Stufe, Dimension, der vollen Hauptsysteme und der Hauptbasis lassen sich nun unmittelbar auf beliebige nicht-kommutative integrable Gruppen übertragen. Das beruht auf dem aus Satz I unmittelbar folgenden

Satz X. *Die Wurzeln der Null einer integrablen Gruppe bilden eine Wurzelgruppe, die zugleich invariante Untergruppe der Gesamtgruppe ist.*

Deshalb sind in einer integrablen Gruppe die Wurzeln der Null zugleich Wurzelgrößen[10]). An Stelle der Haupteinheit treten hier als volles Hauptsystem nullter Dimension die h Partialeinheiten oder h andere nach Art der vollen Systeme aus ihnen abgeleitete Größen auf. Bei der Bildung der Größen der β-ten Stufe sind in den Produkten außer β Wurzelgrößen noch eine beliebige Anzahl von Größen nullter Stufe als Faktoren zuzulassen. Da das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht vorausgesetzt wird, können natürlich auch nicht mehr die gleichen Faktoren, die an verschiedenen Stellen des Produktes auftreten, zu Potenzen zusammengefaßt werden. Es sind vielmehr alle möglichen Kombinationen mit Wiederholungen zu betrachten.

Die so erhaltenen Invarianten $r_1, r_2, \ldots$ lassen sich nun ihrerseits wieder einzeln in je h^2 Invarianten $m_{\alpha\beta}, m'_{\alpha\beta}, \ldots$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, h)$ zerlegen.

---

[7]) Cartan, Ann. Fac. sc. Toulouse 12 (1898), mém. Nr. 2, S. 36.
[8]) Cartan, a. a. O.
[9]) Dissertation, S. 17.
[10]) Zur Unterscheidung dieser Begriffe siehe Frobenius, a. a. O. [5]), S. 635 u. 637.

Diese bedeuten die Anzahl der Größen vom Charakter $(\alpha; \beta)$ in einem
len Hauptsystem 1., 2., ..., μ., ... Dimension aus Größen von be-
mmtem Charakter. Um dies zu beweisen, muß ich zunächst zeigen,
3 es überhaupt stets volle Hauptsysteme μ-ter Dimension aus Größen
1 bestimmtem Charakter gibt (Satz XI), sodann, daß die Zahlen wirklich
arianten der Gruppe sind (Satz XII und Satz XIV). Da ich bei den
genden Untersuchungen von dieser Tatsache nur bei den vollen Haupt-
temen 1. Dimension Gebrauch mache, beschränke ich mich auf den Fall
$= 1$; doch sind die Beweise, wie man sofort sieht, ganz entsprechend
beliebiges μ zu führen.

Zur bequemeren Unterscheidung bezeichne ich die Partialeinheiten
es vollen Systems mit

$$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ 1 \leqq h < m),$$

Größen eines vollen Hauptsystems erster Dimension mit

$$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r;\ 1 \leqq r < m).$$

nn gilt

Satz XI. *In einer integrablen Gruppe läßt sich stets ein volles*
uptsystem 1. Dimension bestimmen, dessen Größen von bestimmtem
arakter sind in bezug auf ein vorgelegtes volles System von Partial-
heiten

2) $$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h).$$

Beweis.

3) $$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

ein beliebiges volles Hauptsystem 1. Dimension der gegebenen Gruppe.
nn bilde ich die $h^2 \cdot r$ Ausdrücke

4) $$x_\alpha y_\varrho x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, h;\ \varrho = 1, \ldots, r).$$

ese sind von bestimmtem Charakter in bezug auf das System (12).
ür jeden der r Werte ϱ ist mindestens einer der Ausdrücke (14) von
1. Dimension, da sonst wegen $y_\varrho = \sum_{\alpha,\beta=1}^{h} x_\alpha y_\varrho x_\beta$ y_ϱ für das bestimmte ϱ
1 der 2. Stufe wäre, entgegen der Voraussetzung.)

Ich wähle aus (14) ein Hauptsystem 1. Dimension derart aus, daß
Anzahl r_0 seiner Größen möglichst groß ist. Wegen der Definition
vollen Hauptsystems ist dann $r_0 \leqq r$. Da sich andererseits jede weitere
Größen (14) durch diese r_0 Größen bis auf Größen 2. Stufe linear
drücken läßt, gilt das gleiche von sämtlichen y_ϱ und folglich von allen
ößen 1. Dimension. Mithin ist $r_0 \geqq r$, also $r_0 = r$. Die ausgewählten
ößen bilden also ein volles Hauptsystem 1. Dimension aus Größen von

bestimmtem Charakter. Daher kann ich jetzt das System (13) von vornherein so gewählt denken, daß seine Größen diese Eigenschaft besitzen. Es gilt nun

Hilfssatz I. *Ist* (13) *ein volles Hauptsystem 1. Dimension aus Größen von bestimmtem Charakter in bezug auf* (12) — ich bezeichne es kurz als ein zu (12) gehörendes volles Hauptsystem 1. Dimension, abgekürzt v.H.1.D. — *und ist* z_σ *eine beliebige Größe 1. Dimension von bestimmtem Charakter* $(\alpha;\beta)$ *in bezug auf* (12), *für die gilt*:

$$z_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{r} c_{\sigma\varrho}\, y_\varrho + (2) \tag{15}$$

— unter (α) nach Herrn Schmeidler stets eine Größe α-ter Stufe verstanden —, *so ist* $c_{\sigma\varrho} = 0$, *sobald* y_ϱ *anderen Charakter besitzt als* z_σ.

Beweis. Ich multipliziere die Gleichung (15) vorn mit x_α, hinten mit x_β:

$$z_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{r} c_{\sigma\varrho}\, x_\alpha\, y_\varrho\, x_\beta + (2). \tag{16}$$

Subtraktion der Gleichung (16) von (15) ergibt:

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{r} c_{\sigma\varrho}\,(y_\varrho - x_\alpha\, y_\varrho\, x_\beta) + (2).$$

Nun ist $x_\alpha\, y_\varrho\, x_\beta = y_\varrho$, wenn y_ϱ vom Charakter $(\alpha;\beta)$ ist, sonst $= 0$. Wäre die Behauptung des Hilfssatzes falsch, so erhielte ich eine lineare Kombination der Größen (13) mit von Null verschiedenen Koeffizienten, die gleich einer Größe 2. Stufe wäre. Das widerspricht der Definition des Hauptsystems 1. Dimension.

Satz XII. *Beim Übergang vom System* (13) *zu einem anderen zu* (12) *gehörenden v.H.1.D.*:

$$z_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{17}$$

bleibt die Anzahl der Größen vom Charakter $(\alpha;\beta)$ *ungeändert* $(\alpha, \beta = 1, \ldots, h)$.

Beweis. Die Anzahl der Größen vom Charakter $(\alpha;\beta)$ in (13) sei durch $m_{\alpha\beta}$, in (17) durch $n_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Ist $m_{\alpha\beta} = 0$, so folgt aus Hilfssatz I unmittelbar: $n_{\alpha\beta} = 0$. Ebenso folgt aus $n_{\alpha\beta} = 0$ wegen der Gleichberechtigung der Systeme (13) und (17): $m_{\alpha\beta} = 0$. Ich kann daher annehmen: $m_{\alpha\beta} > 0$, $n_{\alpha\beta} > 0$. Die $m_{\alpha\beta}$ Größen aus (13) vom Charakter $(\alpha;\beta)$ seien bezeichnet mit

$$y, y', \ldots,$$

die $n_{\alpha\beta}$ aus (17) mit

$$z, z', \ldots$$

ann bestehen nach Hilfssatz I Gleichungen der Form:

8) $z = py + p'y' + \ldots + (2); \quad z' = qy + q'y' + \ldots + (2); \quad \ldots,$

o die Konstanten $p, p', \ldots, q, q', \ldots, \ldots$ nicht sämtlich Null sind. An-nommen: $m_{\alpha\beta} \neq n_{\alpha\beta}$; dann kann ich aus Symmetriegründen annehmen: $_\beta > m_{\alpha\beta}$. Folglich läßt sich aus den Gleichungen (18) durch Multi-ikation mit gewissen Konstanten und Addition eine Gleichung der Form rleiten:

$$0 = cz + c'z' + \ldots + (2),$$

o die Konstanten $c, c', \ldots$ nicht sämtlich Null sind. Da die Größen $z', \ldots$ einem v.H.1.D. angehören, ist diese Gleichung unmöglich, wor-s folgt:

$$n_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta},$$ w. z. b. w.

Da sich die $y, y', \ldots$ entsprechend durch die $z, z', \ldots$ ausdrücken ssen, so ergibt sich der

Zusatz: *Die Determinante*

$$\begin{vmatrix} p & p' & p'' & \cdots \\ q & q' & q'' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aus dem Zusatz und aus Hilfssatz I folgt der

Satz XIII. *Ist* y_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ (13) *ein zu* x_α $(\alpha = 1, \ldots, h)$ (12) *hörendes v.H.1.D., so läßt sich daraus jedes andere zu* (12) *gehörige H.1.D. gewinnen dadurch, daß man für jedes Wertepaar* $\alpha, \beta = 1, \ldots, h$, *dem es Größen vom Charakter* $(\alpha; \beta)$ *in* (13) *gibt, die Gesamtheit eser* $m_{\alpha\beta}$ *Größen einer linearen Substitution mit von Null verschiedener eterminante unterwirft und Größen 2. Stufe vom Charakter* $(\alpha; \beta)$ *hinzu-gt. Die Substitutionsdeterminante r-ten Grades des gesamten v.H.1.D. rfällt dann in ein Produkt von Null verschiedener Unterdeterminanten r Grade* $m_{\alpha\beta} > 0$.

Hilfssatz II. (12): x_α *und*

9) $$x'_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

ien zwei beliebige volle Systeme von Partialeinheiten ein und derselben ruppe, die durch die Gleichungen verbunden sind

0) $$x'_\alpha = x_\alpha + (1).$$

t dann y eine beliebige Größe 1. Dimension vom Charakter $(\alpha; \beta)$ *in zug auf* (12), *so hat sie die Gestalt*

1) $$y = y' + (2),$$

o y' eine Größe 1. Dimension vom Charakter $(\alpha; \beta)$ *in bezug auf* (19) *ist.*

Beweis. Ich setze

$$y' = x'_\alpha y x'_\beta . \tag{22}$$

Diese Größe ist gewiß vom Charakter $(\alpha; \beta)$ in bezug auf (19). Wegen (20) ist

$$y' = (x_\alpha + (1)) y (x_\beta + (1)) = x_\alpha y x_\beta + (2) = y + (2).$$

Also hat y die Gestalt (21). Daher ist y' auch gewiß von der 1. Dimension, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz XIV. (12): x_α *und* (19): x'_α $(\alpha = 1, \ldots, h)$ *seien* wieder *zwei beliebige volle Systeme von Partialeinheiten, die ich so numeriert denke, daß die Gleichungen* (20) *bestehen. Bezeichne* $m_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, h)$ *die Anzahlen der Größen vom Charakter* $(\alpha; \beta)$ *in einem beliebigen zu* (12) *gehörenden v.H.1.D.*

$$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{13}$$

so enthält auch jedes zu (19) *gehörende v.H.1.D.* $m_{\alpha\beta}$ *Größen vom Charakter* $(\alpha; \beta)$.

Beweis. Anwendung des Hilfssatzes II auf alle Größen (13) ergibt:

$$y_\varrho = y'_\varrho + (2) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{23}$$

Darin ist jedes y'_ϱ eine Größe 1. Dimension von gleichem Charakter in bezug auf (19) wie die entsprechende Größe y_ϱ in bezug auf (12). Folglich treten auch in dem System

$$y'_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{24}$$

je $m_{\alpha\beta}$ Größen vom Charakter $(\alpha; \beta)$ auf $(\alpha, \beta = 1, \ldots, h)$. Da die Substitutionsdeterminante den Wert 1 hat, ist auch das System (24) ein v.H.1.D. Von diesem speziellen kann ich aber nach Satz XII zu einem beliebigen zu (19) gehörenden v.H.1.D. übergehen, ohne die Anzahl der Größen vom Charakter $(\alpha; \beta)$ zu ändern. Damit ist der Satz bewiesen. Die Zahlen $m_{\alpha\beta}$ sind also Invarianten der Gruppe.

Um zu einer weiteren Invariante zu gelangen, führe ich folgende Definitionen ein:

Definition I. *Ist* y_ϱ *eine Größe* 1. *Dimension, so verstehe ich, nach Schmeidler*[11]*, unter ihrem Grad diejenige positive ganze Zahl* g_ϱ, *für die* $y_\varrho^{g_\varrho}$ *von der Dimension* g_ϱ, *dagegen* $y_\varrho^{g_\varrho+1}$ *entweder Null oder von einer Dimension* $\geqq g_\varrho + 2$ *ist.*

[11]) Dissertation, S. 24.

Man erkennt dann unmittelbar den

Hilfssatz III. *Ist* $y_\varrho = y'_\varrho + (2)$ *eine Größe 1. Dimension vom* rade g_ϱ, *so besitzt auch* y'_ϱ *den Grad* g_ϱ.

Definition II. *Bezeichnet*

3) $$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

n *beliebiges v.H.1.D. der Gruppe,* g_ϱ *den Grad von* y_ϱ, *so heißt*

5) $$\sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho$$

e Gradsumme des Systems (13).

Da $g_\varrho \geqq 1$ ist und allgemein Wurzelgrößen in der Gruppe angenommen urden, ist die Gradsumme eines jeden Systems positiv.

Ich lasse nun nur volle Hauptsysteme von bestimmtem Charakter — nächst in bezug auf ein bestimmtes System von Partialeinheiten

2) $$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$ —

ır Konkurrenz zu. Die kleinste unter den zugehörigen Gradsummen sei it g bezeichnet, und

3) $$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

i ein volles Hauptsystem von der Gradsumme g. Ich lege nun ein eliebiges anderes volles System von Partialeinheiten

9) $$x'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

on der Gestalt

20) $$x'_\alpha = x_\alpha + (1)$$

ugrunde. Dann lehrt Gleichung (23), daß ich aus (13) ein volles Haupt- ystem 1. Dimension (24) von bestimmtem Charakter in bezug auf (19) ewinnen kann, dessen Gradsumme ebenfalls g ist. Da ich diese Schluß- eise umkehren kann, ist g zugleich die kleinste Gradsumme aller vollen Hauptsysteme von bestimmtem Charakter in bezug auf (19). Daher ist g nabhängig von dem zugrunde gelegten System von Partialeinheiten, also ine Invariante der Gruppe. Folglich kann ich definieren

Definition III[12]). *g heißt die Gradsumme der Gruppe. Ein zu inem beliebigen vollen System von Partialeinheiten gehörendes v.H.1.D. on der Gradsumme g heißt primitiv. Ich bezeichne es kurz als .v.H.1.D.*

Definition IV. *Ein volles System von Partialeinheiten mit einem ugehörenden p.v.H.1.D bezeichne ich als ein Grundsystem der Gruppe.*

[12]) Die Anregung zu dieser Definition verdanke ich Herrn Dr. Schmeidler.

Anmerkung: Enthält die Gruppe mehr als eine Partialeinheit, so kann es in ihr sehr wohl volle Hauptsysteme 1. Dimension geben, deren Gradsumme kleiner ist als die Gradsumme der Gruppe. Als Beleg hierfür diene die Gruppe mit dem folgenden Multiplikationsschema

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	z
x_1	x_1	0	y_1	y_2	0	z
x_2	0	x_2	0	0	y_3	0
y_1	y_1	z	0	0	0	0
y_2	0	y_2	0	0	$-z$	0
y_3	y_3	0	0	0	0	0
z	z	0	0	0	0	0

Die Größen y_1, y_2, y_3 bilden ein zu dem vollen System von Partialeinheiten x_1, x_2 gehörendes v.H.1.D. Seine Gradsumme ist

$$2+1+1=4.$$

Ein beliebiges anderes zu x_1, x_2 gehöriges v.H.1.D. hat aber nach Satz XIII die Gestalt:

$$y_1'=ay_1+dz, \qquad y_2'=by_2, \qquad y_3'=cy_3,$$

wo die a, b, c notwendig von Null verschieden sind.

Dies System hat wiederum die Gradsumme 4; also ist nach den obigen Überlegungen 4 die Gradsumme der Gruppe. — Dagegen hat das v.H.1.D.

$$y_1''=y_1+y_2+y_3, \qquad y_2''=y_2, \qquad y_3''=y_3,$$

dessen Größen nicht mehr von bestimmtem Charakter sind, die Gradsumme 3.

Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß die angegebenen Invarianten die Gruppe nicht eindeutig definieren. Die durch die Multiplikationstafeln

	x	y_1	y_2	z
x	x	y_1	y_2	z
y_1	y_1	0	z	0
y_2	y_2	z	0	0
z	z	0	0	0,

	x	y_1	y_2	z
x	x	y_1	y_2	z
y_1	y_1	0	z	0
y_2	y_2	0	0	0
z	z	0	0	0

gegebenen Gruppen stimmen in den angeführten Invarianten überein, ohne isomorph zu sein. Die erste ist nämlich kommutativ (und zerlegbar), die zweite ist nicht kommutativ (und unzerlegbar). Die Invarianten sind

$$m=4, \qquad r_1=r=m_{11}=2,$$
$$h=1, \qquad r_2= \qquad m_{11}=1,$$
$$l=3, \qquad g=2.$$

§ 4.

Die primitiven vollen Hauptsysteme 1. Dimension des Produkts.

Es bezeichne im folgenden stets

2) $$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

n volles System von Partialeinheiten der integrablen Gruppe $\mathfrak{A}$,

3) $$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

n zu (12) gehörendes v. H. 1. D. Entsprechend sei in der integrablen ruppe $\mathfrak{B}$

6) $$u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k;\ k \geqq 1)$$

n volles System von Partialeinheiten und

7) $$v_\sigma \qquad (\sigma = 1, \ldots, s;\ s \geqq 1)$$

n zu (26) gehörendes v. H. 1. D. Dann erkennt man unmittelbar den

Satz XV. *In dem Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *bilden die* hk *Größen*

8) $$x_{\alpha\beta} = x_\alpha u_\beta \quad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k)$$

n volles System von Partialeinheiten, die $kr + hs$ *Größen*

9) $$y_\varrho u_\beta \qquad (\varrho = 1, \ldots, r;\ \beta = 1, \ldots, k)$$

nd

0) $$x_\alpha v_\sigma \qquad (\alpha = 1, \ldots, h, \sigma = 1, \ldots, s)$$

n zu (28) *gehörendes v. H.* 1. *D.*

Allgemein gilt: Erzeugt man aus den Größen (12) und (13) eine auptbasis von $\mathfrak{A}$, aus den Größen (26) und (27) eine Hauptbasis von , so erhält man ein volles Hauptsystem γ-ter Dimension von $\mathfrak{G}$, indem an für jedes Wertepaar α, β $(0 \leqq \alpha \leqq \gamma,\ 0 \leqq \beta \leqq \gamma,\ \alpha + \beta = \gamma)$, zu m es Werte α-ter Dimension in $\mathfrak{A}$ und β-ter Dimension in $\mathfrak{B}$ gibt, de Größe des vollen Hauptsystems α-ter Dimension in $\mathfrak{A}$ mit jeder öße des vollen Hauptsystems β-ter Dimension in $\mathfrak{B}$ multipliziert[13]). nd die Größen der Hauptbasis von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ von bestimmtem Charakter bezug auf (12) bzw. (26), so sind die Größen der Hauptbasis von $\mathfrak{G}$ n bestimmtem Charakter in bezug auf (28).

Bleibt eine von Null verschiedene Größe der Gruppe bei vorderer ultiplikation mit $x_{\varkappa\mu}$ und hinterer mit $x_{\lambda\nu}$ ungeändert, so bezeichne ich ren Charakter durch

$$(\varkappa, \mu;\ \lambda, \nu).$$

---

[13]) Vergleiche die entsprechenden Ausführungen in der Schmeidlerschen ssertation.

Ist daher in $\mathfrak{A}$ y_ϱ vom Charakter $(\varkappa; \lambda)$, v_σ in $\mathfrak{B}$ vom Charakter $(\mu; \nu)$, so ist $y_\varrho u_\beta$ vom Charakter $(\varkappa, \beta; \lambda, \beta)$, $x_\alpha v_\sigma$ vom Charakter $(\alpha, \mu; \alpha, \nu)$ in $\mathfrak{G}$.

Da sich jede Größe 1. Dimension in $\mathfrak{G}$ von bestimmtem Charakter $(\varkappa, \mu; \lambda, \nu)$ in bezug auf (28) nach Hilfssatz I bis auf Größen 2. Stufe linear durch Größen (29) und (30) von gleichem Charakter ausdrückt, so ist stets eine der beiden Gleichungen erfüllt:

$$\varkappa = \lambda, \qquad \mu = \nu. \tag{31}$$

Für $\varkappa \neq \lambda$ treten in dem linearen Bestandteil nur Größen aus (29) auf, für $\mu \neq \nu$ dagegen nur Größen aus (30). Sind aber beide Gleichungen (31) erfüllt, so können aus beiden Systemen (29) und (30) Größen mit von Null verschiedenen Koeffizienten auftreten. Vermieden wird dies erst bei den Größen, die einem primitiven v. H. 1. D. angehören.

Um diesen Nachweis führen zu können, bedarf ich einiger Hilfssätze.

Hilfssatz IV. *Ist u_β $(1 \leqq \beta \leqq k)$ eine beliebige Partialeinheit von $\mathfrak{B}$, so bildet die Gesamtheit der Größen $A u_\beta$, wo A eine Größe aus $\mathfrak{A}$ ist, eine zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{A} u_\beta$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus $u_\beta^2 = u_\beta$, wenn man jeder Größe A die Größe $A u_\beta$ zuordnet. Als $\mathfrak{A} u_\beta$-Komponente einer Größe in $\mathfrak{G}$ bezeichne ich denjenigen Bestandteil der Größe, der sich durch die Basis von $\mathfrak{A} u_\beta$ darstellen läßt. Diese bildet ja einen Teil einer Basis des Produktes $\mathfrak{G}$. Offenbar ist die $\mathfrak{A} u_\beta$-Komponente einer Größe aus $\mathfrak{G}$ unabhängig von der Wahl der Basis in $\mathfrak{A}$. Entsprechend lassen sich natürlich die $\mathfrak{B} x_\alpha$-Komponenten einführen $(1 \leqq \alpha \leqq h)$.

Hilfssatz V. *Sind G_1, G_2 zwei beliebige Größen im Produkt $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so ist, unter u_β eine beliebige, aber fest gewählte Partialeinheit von $\mathfrak{B}$ verstanden, die $\mathfrak{A} u_\beta$-Komponente von $G_1 + G_2$ bzw. $G_1 \cdot G_2$ gleich der Summe bzw. dem Produkt der $\mathfrak{A} u_\beta$-Komponenten der Größen G_1 und G_2.*

Entsprechendes gilt für die $\mathfrak{B} x_\alpha$-Komponenten. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung der Größen von $\mathfrak{G}$ durch eine Hauptbasis, die aus dem vollen Hauptsystem nullter Dimension (28) und aus dem vollen Hauptsystem erster Dimension (29) und (30) erzeugt ist, wenn man die Definitionsgleichungen (5) und (6) der Partialeinheiten berücksichtigt.

Hilfssatz VI. *Hat die Größe 1. Dimension y in $\mathfrak{A}$ den Grad γ, so hat auch $y u_\beta$ in $\mathfrak{G}$ den Grad γ.*

Beweis. Nach Hilfssatz IV ist $y u_\beta$ eine Größe 1. Dimension vom Grade γ in der Untergruppe $\mathfrak{A} u_\beta$ von $\mathfrak{G}$; ihr Grad in $\mathfrak{G}$ kann daher nach der Definition dieses Begriffes (Definition I) höchstens geringer sein

Bestände in $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$(y u_\beta)^\gamma = (\gamma + 1),$$

erhielte ich durch den nach Hilfssatz V erlaubten Übergang zu den u_β-Komponenten dieselbe Gleichung in bezug auf die Untergruppe, was Voraussetzung widersprechen würde.

Hilfssatz VII. *Ist y eine Größe 1. Dimension vom Charakter $(\alpha; \alpha)$ d vom Grade γ_1 in $\mathfrak{A}$, v eine Größe 1. Dimension vom Charakter $\beta)$ und vom Grade γ_2 in $\mathfrak{B}$, so ist*

$$z = y u_\beta + v x_\alpha + (2) \tag{2}$$

e Größe vom Grade $\gamma_1 + \gamma_2$ in $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$y x_\alpha = x_\alpha y = y$$

$$v u_\beta = u_\beta v = v.$$

Aus der Definition des Produktes zweier Gruppen folgt ferner:

$$xy = yx + 0,$$

bald nur beide Faktoren nicht verschwinden. Also ist

$$z^\tau = \sum_{\varrho+\sigma=\tau} x^\varrho y^\sigma + (\tau + 1); \tag{3}$$

bei ist für den Augenblick unter y^0 die Größe x_α, unter v^0 die Größe verstanden. Ist

$$\varrho > \gamma_1 \quad \text{oder} \quad \sigma > \gamma_2, \tag{4}$$

ist

$$y^\varrho v^\sigma = (\tau + 1).$$

Für $\tau > \gamma_1 + \gamma_2$ ist aber stets eine der Ungleichungen (34) erfüllt; o ist dann

$$z^\tau = (\tau + 1),$$

h. der Grad γ von z ist

$$\gamma \leqq \gamma_1 + \gamma_2.$$

Für $\tau = \gamma_1 + \gamma_2$ tritt auf der rechten Seite von (33) das Glied v^{γ_2} auf, sonst nur Glieder der Stufe $\gamma_1 + \gamma_2 + 1$. Da y^{γ_1} von der mensin γ_1 in $\mathfrak{A}$ ist, läßt es sich durch ein volles Hauptsystem γ_1-ter mension von $\mathfrak{A}$ und Größen der Stufe $\gamma_1 + 1$ linear ausdrücken, wobei ndestens eine Größe des vollen Hauptsystems γ_1-ter Dimension mit em nicht-verschwindenden Koeffizienten auftritt. Ebenso tritt in der rstellung von v^{γ_2} durch eine Hauptbasis von $\mathfrak{B}$ mindestens eine Größe vollen Hauptsystems γ_2-ter Dimension mit einem nicht-verschwindenden

Koeffizienten auf und außer den Größen dieses Systems nur Größen der Stufe $\gamma_2 + 1$. Also ist nach der Definition des Produktes zweier Gruppen $y^{\gamma_1} v^{\gamma_2}$ und folglich auch $z^{\gamma_1+\gamma_2}$ von der Dimension $\gamma_1 + \gamma_2$, w. z. b. w.

Satz XVI. *Ist in der integrablen Gruppe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$$z_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, hs + kr \tag{35}$$

ein zu dem vollen System von Partialeinheiten

$$x_{\alpha\beta} = x_\alpha u_\beta \tag{28}$$

gehörendes p.v.H.1.D., so lassen sich zu jedem β, $1 \leqq \beta \leqq r$, *aus ihm* s *Größen auswählen, deren* $\mathfrak{A} u_\beta$*-Komponenten ein zu dem vollen System von Partialeinheiten in* $\mathfrak{A} u_\beta$

$$x_{\alpha\beta} = x_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h \tag{36}$$

gehörendes p.v.H.1.D. bilden, während alle übrigen Komponenten von der 2. Stufe sind.

Beweis. Ich zeige zunächst, daß sich aus (35) r Größen auswählen lassen, deren $\mathfrak{A} u_\beta$-Komponenten ein zu (36) gehörendes v.H.1.D. bilden während die übrigen Bestandteile von der 2. Stufe sind. Die Größen

$$y_\varrho u_\beta \qquad (\varrho = 1, \ldots, r \tag{37}$$

stellen ein zu (36) gehörendes v.H.1.D. dar. Diese Größen besitzen sämtlich einen Charakter

$$(\varkappa, \beta; \lambda, \beta) \qquad (1 \leqq \varkappa, \lambda \leqq h)$$

Nach Satz XIII genügt es daher, wenn ich zeige:

Ist die Anzahl $m_{\varkappa\lambda}$ der Größen

$$y u_\beta, \quad y' u_\beta, \ldots \tag{38}$$

vom Charakter $(\varkappa, \beta; \lambda, \beta)$ aus (37) größer als Null, so kommen in (35) $m_{\varkappa\lambda}$ Größen vor, die sich bis auf Größen 2. Stufe linear mit einer nicht verschwindenden Determinante aus den Größen (38) herleiten lassen.

Zu diesem Zweck betrachte ich alle Größen (35) vom Charakter $(\varkappa, \beta; \lambda, \beta)$ $(\varkappa, \lambda = 1, \ldots, h)$. Die Gesamtheit der zu einem festen Wertepaare $\varkappa, \lambda$ gehörenden dieser Größen leitet sich nach Hilfssatz I und dem Zusatz zu Satz XII in der verlangten Weise her aus der Gesamtheit der Größen gleichen Charakters aus (29) und (30).

Ist $\varkappa \neq \lambda$, so kommen solche Größen aber nur in dem Teilsystem (37) aus (29) vor. Für diesen Fall ist die Behauptung also bewiesen.

Ist dagegen $\varkappa = \lambda = \alpha$, so setzen sich die Größen (35) vom Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ in der verlangten Weise zusammen aus den $m_{\alpha\alpha}$ Größen (37) für die y_ϱ in $\mathfrak{A}$ vom Charakter $(\alpha; \alpha)$ ist, und aus den $n_{\beta\beta}$ Größen x_σ aus (30), für die v_σ in $\mathfrak{B}$ vom Charakter $(\beta; \beta)$ ist. Ist $m_{\alpha\alpha} = 0$,

eide ich die $n_{\beta\beta} > 0$ Größen (35) vom Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ aus
herausgegriffenen wieder aus.

Ist $n_{\beta\beta} = 0$, dagegen $m_{\alpha\alpha} > 0$, so setzen sich die $m_{\alpha\alpha}$ Größen (35)
n Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ bereits in der verlangten Weise aus den $m_{\alpha\alpha}$
ößen vom Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ in (37) zusammen.

Ist dagegen $m_{\alpha\alpha} > 0$ und $n_{\beta\beta} > 0$, so denke ich mir die Koeffizienten
$y_\varrho u_\beta$ in die vorderen, die der $x_\alpha v_\sigma$ in die hinteren Spalten der Deter-
nante des Grades $m_{\alpha\alpha} + n_{\beta\beta}$ geschrieben. Da diese Determinante nicht
rschwindet, kommt nach dem Laplaceschen Determinantensatz in den
ten $m_{\alpha\alpha}$ Spalten mindestens eine von Null verschiedene Unterdeter-
nante des Grades $m_{\alpha\alpha}$ vor, deren komplementäre Unterdeterminante des
ades $n_{\beta\beta}$ ebenfalls nicht Null ist. Ich kann die Größen (35) so an-
ordnet denken, daß die Unterdeterminante der ersten $m_{\alpha\alpha}$ und die der
zten $n_{\beta\beta}$ Zeilen und Spalten nicht verschwindet. Scheide ich nun die
den letzten $n_{\beta\beta}$ Zeilen gehörenden Größen (35) aus den heraus-
griffenen wieder aus, so behalte ich $m_{\alpha\alpha}$ Größen zurück, deren $\mathfrak{A} u_\beta$-
mponenten die verlangte Eigenschaft besitzen.

Es ist nun zu zeigen, daß alle übrigen Komponenten von der 2. Stufe
d. Als Größen vom Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ könnten sie höchstens noch
x_α-Komponenten 1. Dimension besitzen. Streiche ich diese, so gehen
betrachteten Größen (35) nach Hilfssatz VII in Größen von nied-
erem Grade über; ihr Charakter bleibt dabei ungeändert. Die Deter-
nante des Grades $m_{\alpha\alpha} + n_{\beta\beta}$ geht dadurch über in ein Produkt zweier
ht verschwindender Determinanten, bleibt also selbst von Null ver-
ieden. Folglich bilden die reduzierten Größen zusammen mit den
rigen Größen (35) wieder ein volles Hauptsystem aus Größen von be-
mmtem Charakter, dessen Gradsumme aber geringer ist. Das wider-
icht der Primitivität des Systems (35). Also enthielten die $m_{\alpha\alpha}$
ößen überhaupt keine $\mathfrak{B} x_\alpha$-Komponenten 1. Dimension. Da ich die
swahl für alle $\alpha = 1, \ldots, h$ treffen kann, ist der Satz bewiesen, wenn
noch zeige, daß die Komponenten ein primitives System bilden. Wäre
s nicht der Fall, so ließe sich in $\mathfrak{A} u_\beta$ ein zu (36) gehörendes v.H.1.D.
n geringerer Gradsumme angeben. Ersetze ich die r aus (35) heraus-
griffenen Größen durch dieses System, so müßte sich die Gradsumme
so abgeänderten Systems (35) erniedrigen, während es zugleich ein zu
) gehörendes v.H.1.D. bliebe. Das ist unvereinbar mit der Primitivität
Systems (35).

Aus Symmetriegründen ergibt sich, daß ich ebenso zu jedem α,
$\leqq \alpha \leqq h$, aus (35) s Größen auswählen kann, deren $\mathfrak{B} x_\alpha$-Komponenten
zu dem System

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k)$$

gehörendes p. v. H. 1. D. der Gruppe $\mathfrak{B}x_\alpha$ bilden, während alle übrige Komponenten von der 2. Stufe sind.

Da jede der $hs+kr$ Größen (35) in genau einer der Gruppen

$$\mathfrak{A}u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k$$

oder

$$\mathfrak{B}x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h$$

eine Komponente 1. Dimension besitzt, so ergibt sich der

Satz XVII. *Das System*

$$z_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, hs+kr$$

zerfällt in zwei Klassen. Die 1. Klasse besteht aus k Abteilungen zu je r Größen, die 2. Klasse aus h Abteilungen zu je s Größen. Jede Abteilung der 1. Klasse läßt sich eineindeutig ein β zuordnen $(1 \leqq \beta \leqq k)$ *so daß die $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten der Größen dieser Abteilung ein zu dem vollen System von Partialeinheiten*

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h$$

gehörendes p. v. H. 1. D in $\mathfrak{A}u_\beta$ bilden, während alle übrigen Komponenten von der 2. Stufe sind. Jeder Abteilung der 2. Klasse läßt sich eineindeutig ein α zuordnen $(1 \leqq \alpha \leqq h)$, *so daß die $\mathfrak{B}x_\alpha$-Komponenten der Größen dieser Abteilung ein zu dem vollen System von Partialeinheiten*

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k$$

gehörendes p. v. H. 1. D. in $\mathfrak{B}x_\alpha$ bilden, während alle übrigen Komponenten von der 2. Stufe sind.

Aus Satz XVII, Hilfssatz VI und der Primitivität des Systems (35) folgt ferner

Satz XVIII. *Hat die integrable Gruppe $\mathfrak{A}$ die Gradsumme g_1 und ein volles System von h Partialeinheiten, die integrable Gruppe $\mathfrak{B}$ die Gradsumme g_2 und ein volles System von k Partialeinheiten, so besitzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Gradsumme*

$$g = k g_1 + h g_2.$$

Da g auch die Gradsumme des aus (29) und (30) gebildeten vollen Hauptsystems 1. Dimension ist, so gilt der

Zusatz. *Bilden*

(12)
$$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h$$

und

(13)
$$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots,$$

ein Grundsystem von $\mathfrak{A}$,

(26)
$$u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots,$$

$$v_\sigma \qquad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

Grundsystem von $\mathfrak{B}$, *dann bilden die Systeme:*

$$x_\alpha u_\beta$$

$$y_\varrho u_\beta$$

$$x_\alpha v_\sigma$$

Grundsystem von $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Satz XIX. *In der integrablen Gruppe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *sei*

$$w_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k)$$

beliebiges volles System von Partialeinheiten,

$$t_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, hs + kr)$$

zu (39) *gehörendes p. v. H.* 1. *D. Dann lassen sich zu jedem* β, $\leqq \beta \leqq k$, *aus* (39) h *Größen, aus* (40) r *Größen herausgreifen, deren* u_β*-Komponenten zusammen ein Grundsystem von* $\mathfrak{A}u_\beta$ *bilden, während die übrigen Komponenten von der* 1. *bzw.* 2. *Stufe sind.*

Beweis. Die Größen $w_{\alpha\beta}$ können von vornherein so numeriert dacht werden, daß die Gleichungen bestehen:

$$w_{\alpha\beta} = x_\alpha u_\beta + (1).$$

nun β eine feste Zahl, so bilden die Größen $x_\alpha u_\beta$, $\alpha = 1 \ldots h$, (36 volles System von Partialeinheiten der Gruppe $\mathfrak{A}u_\beta$. Folglich bilden $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten

$$x'_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

Größen

$$w_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

viß ein volles Hauptsystem nullter Dimension in $\mathfrak{A}u_\beta$, da sie sich ja den Größen $x_\alpha u_\beta$ höchstens um Größen 1. Stufe in $\mathfrak{A}u_\beta$ unterscheiden. nt man in den Gleichungen

$$w_{\alpha\beta}^2 = w_{\alpha\beta}$$

l für $h > 1$:

$$w_{\alpha\beta} w_{\gamma\beta} = 0 \qquad (1 \leqq \alpha \leqq h;\ 1 \leqq \beta \leqq h;\ \alpha + \gamma)$$

den $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten über, so folgt

$$(x'_\alpha u_\beta)^2 = x'_\alpha u_\beta$$

$$x'_\alpha u_\beta\, x'_\gamma u_\beta = 0.$$

Die Größen (42) bilden also ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{A}u_\beta$.

Da die Gleichungen (41) bestehen, kann ich nach Hilfssatz II die Größen (40) in ein zu den

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k) \tag{28}$$

gehörendes p.v.H.1.D.

$$z_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, hs + kr)$$

verwandeln, das nach Hilfssatz III ebenfalls primitiv ist. In ihm kann ich daher nach Satz XVI r Größen auswählen, deren $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten ein zu (36) gehörendes p.v.H.1.D. bilden:

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h) \tag{36}$$

Durch die Hinzufügung der Größen 2. Stufe sind auch die $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten höchstens um Größen 2. Stufe geändert. Gehe ich daher wieder zu dem System (40) zurück, so besitzen die entsprechenden r Größen in diesem System ebenfalls $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten 1. Dimension, die ein v.H.1.D. bilden; die Gradsumme dieses Systems ist die gleiche wie die des primitiven. Es ist also nur noch zu zeigen, daß seine Größen von bestimmtem Charakter sind in bezug auf die

$$x'_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h). \tag{42}$$

Der Übergang vom System (40) zum System

$$z_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, hs + kr) \tag{35}$$

war derart vollzogen, daß eine Größe aus (40) in bezug auf (39) den gleichen Charakter besitzt, wie die ihr entsprechende Größe aus (35) in bezug auf (28). Folglich besitzen die r aus (40) herausgegriffenen Größen sämtlich einen Charakter $(\alpha, \beta;\ \gamma, \beta)$, wo $1 \leqq \alpha \leqq h$, $1 \leqq \gamma \leqq h$. Ist also t_ϱ eine beliebige der r Größen, τ_ϱ ihre $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponente, so ist

$$w_{\alpha\beta} t_\varrho = t_\varrho w_{\gamma\beta} = t_\varrho.$$

Daraus folgt durch Übergang zu den $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponenten:

$$x'_\alpha u_\beta \tau_\varrho = \tau_\varrho x'_\gamma u_\beta = \tau_\varrho.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zusatz. *Die h Größen*

$$w_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, h) \tag{43}$$

und die r Größen aus (40) — sie seien mit

$$t_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

bezeichnet — *erzeugen eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Da die Größen gewiß eine Gruppe im weiteren Sinn ergen, braucht nur gezeigt zu werden, daß sie eine Haupteinheit besitzen. In der Tat gilt für die Größe

$$W = \sum_{\alpha=1}^{h} w_{\alpha\beta}:$$

$$W w_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta} W = w_{\alpha\beta},$$

$$W t_\varrho = t_\varrho W = t_\varrho.$$

lglich läßt W eine beliebige aus den $w_{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, \ldots, h$, und t_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, eugte Größe bei vorderer und hinterer Multiplikation ungeändert, stellt o die Haupteinheit dieser Gruppe dar.

Satz XX. *Das System* (40) *läßt sich entsprechend dem System* (35) *Satzes* XVII *in Klassen und Abteilungen einteilen. Jeder Abteilung r* 1. *Klasse läßt sich eineindeutig ein* β *zuordnen,* $(1 \leqq \beta \leqq k)$, *derart,* β *die* $\mathfrak{A} u_\beta$*-Komponenten der Größen dieser Abteilung ein zu den* u_β*-Komponenten von* h *Größen* (39): $w_{\alpha\beta}$, *gehörendes p.v.H.* 1. *D. den, während alle übrigen Komponenten von der* 2. *Stufe sind. Jeder teilung der* 2. *Klasse läßt sich eineindeutig ein* α $(1 \leqq \alpha \leqq h)$ *zuordnen, rart, daß die* $\mathfrak{B} x_\alpha$*-Komponenten der Größen dieser Abteilung ein zu n* $\mathfrak{B} x_\alpha$*-Komponenten von* k *Größen* (39) *gehörendes p.v.H.* 1. *D. den, während alle übrigen Komponenten von der* 2. *Stufe sind.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz XIX.

§ 5.

Irreduzible integrable Gruppen.

In seiner Dissertation hat Herr Schmeidler gezeigt, daß der Zerungssatz nicht mehr allgemein für reduzible Gruppen gilt. Ich behränke mich darum auch auf irreduzible Gruppen.

Als Kriterium für die Reduzibilität einer Gruppe gibt Herr Scheffers[14]) e Existenz einer von der Haupteinheit E verschiedenen Größe nullter mension an: E_0, die mit sämtlichen Größen der Gruppe vertauschbar . Nimmt x alle Werte der Gruppe $\mathfrak{G}$ an, so stellt

$$E_0 x = x E_0$$

e Gesamtheit der Größen des einen Summanden $\mathfrak{G}_1$ dar,

$$(E - E_0) x = x (E - E_0)$$

e des anderen Summanden $\mathfrak{G}_2$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2.$$

[14]) Mathematische Annalen **39** (1891), S. 319.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß aus der Reduzibilität eines Faktors die des Produktes folgt[15]). Oder:

Satz XXI. *Jeder Faktor einer irreduziblen Gruppe ist selbst irreduzibel.*

Aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Reduzibilität einer Gruppe gewinnt man leicht das folgende Kriterium für die Irreduzibilität[16]):

Satz XXII. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn entweder die Haupteinheit ein volles Hauptsystem nullter Dimension bildet, oder wenn die Partialeinheiten eines vollen Systems sich eventuell mit Wiederholungen so anordnen lassen, daß es zu zwei aufeinander folgenden x_α, x_β in $\mathfrak{G}$ stets eine von Null verschiedene Wurzelgröße vom Charakter $(\alpha; \beta)$ oder $(\beta; \alpha)$ gibt.*

Um diesem Kriterium eine etwas andere Fassung zu geben, definiere ich:

Definition V. *Zwei voneinander verschiedene Partialeinheiten x_α, x_β eines vollen Systems von Partialeinheiten heißen unmittelbar verkoppelt, wenn es in der Gruppe eine Größe y erster Dimension gibt, die entweder vom Charakter $(\alpha; \beta)$ oder vom Charakter $(\beta; \alpha)$ ist. y heißt dann eine x_α, x_β verkoppelnde Größe.*

Hilfssatz VIII. *Gehören x_α, x_β einem vollen System von Partialeinheiten an, x'_α, x_β einem anderen vollen System von Partialeinheiten derselben Gruppe, und sind die Größen durch die Gleichungen verbunden*

$$x'_\alpha = x_\alpha + (1), \qquad x'_\beta = x_\beta + (1), \tag{44}$$

so sind x'_α, x'_β dann und nur dann unmittelbar verkoppelt, wenn x_α und x_β es sind.

Beweis. Ist y die x_α, x_β verkoppelnde Größe, so läßt sie sich nach Hilfssatz II auf die Form bringen

$$y = y' + (2),$$

wo y' eine x'_α, x'_β verkoppelnde Größe ist.

Hilfssatz IX. *Sind x_α, x_γ in $\mathfrak{A}$ unmittelbar verkoppelt, so sind $x_\alpha u_\beta$ und $x_\gamma u_\beta$ $(1 \leqq \beta \leqq k)$ in $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ unmittelbar verkoppelt.*

Beweis. y sei die x_α, x_γ verkoppelnde Größe in $\mathfrak{A}$. Dann ist $y u_\beta$ eine $x_\alpha u_\beta$ und $x_\gamma u_\beta$ verkoppelnde Größe in $\mathfrak{G}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Definition VI. *Die Partialeinheiten $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu$ bilden eine Kette, wenn je zwei aufeinander folgende unmittelbar verkoppelt sind.*

---

[15]) Mathematische Annalen 39 (1891), S. 326.
[16]) A. a. O., S. 328.

Läßt sich x_α mit x_β durch eine Kette verbinden, so gilt das gleiche
x_β und x_α, da die Kette rückwärts geschrieben werden kann. Daher
n ich definieren:

Definition VII. *Zwei Partialeinheiten heißen verkoppelt, wenn sie weder unmittelbar verkoppelt sind oder sich durch eine Kette verden lassen.*

Man erkennt auch sofort den

Hilfssatz X. *Sind x_α und x_β, x_β una x_γ verkoppelt, so sind auch und x_γ verkoppelt.*

Anmerkung. Hiernach ist also x_α dann und nur dann mit sich selbst koppelt, wenn es mit irgendeiner anderen Partialeinheit verkoppelt ist.

Wiederholte Anwendung von Hilfssatz X ergibt

Hilfssatz XI. *Bestehen zwischen den Partialeinheiten x_α, x_β, x'_α, x_β Gleichungen* (44), *so sind x'_α und x'_β dann und nur dann verkoppelt, n auch x_α, x_β es sind.*

Unter Benutzung dieser Begriffe ergibt sich der

Satz XXIII. *Eine Gruppe ist dann und nur dann irreduzibel, wenn weder die Haupteinheit ein volles Hauptsystem nullter Dimension bildet, r wenn in einem vollen System*

$$x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

Partialeinheiten je zwei beliebige verkoppelt sind.

Beweis. 1. Die Bedingung ist hinreichend. Bildet nämlich die upteinheit ein volles Hauptsystem nullter Dimension, so kann die ppe gewiß nicht reduzibel sein, da das Scheffersche Reduzibilitätserium nicht erfüllt sein kann. Ist die Anzahl der Partialeinheiten -1, und sind zwei beliebige stets miteinander verkoppelt, so ist für $= 2$ das Scheffersche Irreduzibilitätskriterium durch die Anordnung x_2 erfüllt. Ist $h > 2$, so füge ich die x_1, x_2; x_2, x_3; …; x_{h-1}, x_h verpelnden Ketten zu einer zusammen (nach Hilfssatz X). Die so entende Anordnung der Partialeinheiten genügt der Scheffersschen Begung (Satz XXII).

2. Die Bedingung ist notwendig. Ich nehme an, die Gruppe sei irreibel. Ist $h = 1$, so ist die Sache klar. Ist $h > 1$, so sei $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu$ Anordnung, die der Bedingung des Satzes XXII genügt. Seien x_γ, x_δ i benachbarte Partialeinheiten aus der Reihe. Ist die nach Satz XXII tierende Wurzelgröße vom Charakter $(\gamma; \delta)$ oder $(\delta; \gamma)$ von der 1. Dision, so ist es gut. Ist sie dagegen von einer Dimension $\lambda > 1$, so uge ich aus einem zu (12) gehörenden v. H. 1. D.

$$y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

eine Hauptbasis, derart, daß ihre Größen Produkte der Größen (13) sind. Diese Produkte sind dann ebenfalls von bestimmtem Charakter in bezug auf (12). Da ich die Größe λ-ter Dimension, die ich aus Symmetriegründen vom Charakter $(\gamma; \delta)$ annehmen kann, durch die Hauptbasis darstellen kann, so gibt es in dem vollen Hauptsystem λ-ter Dimension gewiß eine Größe vom Charakter $(\gamma; \delta)$. Diese hat die Gestalt

$$y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\lambda)},$$

wobei die $y^{(\varkappa)}$ Größen (13) sind, die nicht notwendig sämtlich voneinander verschieden zu sein brauchen. $y^{(1)}$ hat hierin einen Charakter $(\gamma; \varrho)$, $y^{(2)}$ einen Charakter $(\varrho; \sigma), \dots, y^{(\lambda)}$ einen Charakter $(\tau; \delta)$, da das Produkt von Null verschieden ist. Also bilden die Partialeinheiten

$$x_\gamma, x_\varrho, x_\sigma, \dots, x_\tau, x_\delta$$

eine Kette.

Auf diese Weise kann ich in der dem Satz XXII entsprechenden Anordnung je zwei aufeinander folgende Partialeinheiten durch eine Kette ersetzen. Die nach Hilfssatz X durch Zusammensetzung all dieser Ketten entstehende Kette verkoppelt daher sämtliche Partialeinheiten miteinander. Es läßt sich somit stets ein Stück dieser Kette angeben, das zwei vorgegebene Partialeinheiten miteinander verkoppelt, womit der Satz bewiesen ist.

Satz XXIV. *Das Produkt* $\mathfrak{G}$ *zweier irreduzibler Gruppen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist selbst irreduzibel.*

Beweis. Bilden die Haupteinheiten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ je ein volles Hauptsystem nullter Dimension dieser Gruppen, so gilt das gleiche von der Haupteinheit in $\mathfrak{G}$ (Satz IV).

Sind (12) x_α $(\alpha = 1, \dots, h)$ und (26) u_β $(\beta = 1, \dots, k)$ zwei volle Systeme von Partialeinheiten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kann ich demnach annehmen, daß mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$h > 1, \quad k > 1.$$

Es seien $x_\alpha u_\beta$ und $x_\gamma u_\delta$ zwei voneinander verschiedene Partialeinheiten von $\mathfrak{G}$. Dann ist gewiß eine der beiden Ungleichungen erfüllt:

$$\alpha \neq \gamma, \quad \beta \neq \delta.$$

Aus Symmetriegründen kann ich annehmen:

$$\alpha \neq \gamma.$$

Da $\mathfrak{A}$ irreduzibel ist, gibt es in $\mathfrak{A}$ eine x_α und x_γ verkoppelnde Kette

(45)
$$x_\alpha, x_\varkappa, \dots, x_\nu, x_\gamma;$$

n ist

$$x_\alpha u_\beta, x_\varkappa u_\beta, \ldots, x_\nu u_\beta, x_\gamma u_\beta$$

$x_\alpha u_\beta$ und $x_\gamma u_\beta$ in $\mathfrak{G}$ verkoppelnde Kette, wie sich durch wiederholte vendung von Hilfssatz IX ergibt. Ist $\beta = \delta$, so ist es gut. Im ent- engesetzten Fall gibt es in der irreduziblen Gruppe eine u_β und u_γ koppelnde Kette:

$$u_\beta, u_\varrho, \ldots, u_\tau, u_\delta.$$

glich sind $x_\gamma u_\beta$ und $x_\gamma u_\delta$ in $\mathfrak{G}$ verkoppelt durch die Kette

) $$x_\gamma u_\beta, x_\gamma u_\varrho, \ldots, x_\gamma u_\tau, x_\gamma u_\delta.$$

o sind nach Hilfssatz X auch $x_\alpha u_\beta$ und $x_\gamma u_\delta$ verkoppelt. Daher ist $\mathfrak{G}$ h Satz XXIII irreduzibel, w. z. b. w.

§ 6.

ziehungen zwischen den Grundsystemen der Faktoren verschiedener Zerlegungen.

Definition VIII. *Jeder beliebigen Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in i Faktoren:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

n ich ein rechteckiges oder lineares Schema ihrer Partialeinheiten $w_{\alpha\beta}$ rdnen. Bedeutet

') $\mathfrak{x}_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \mathfrak{h})$

v.

) $\mathfrak{u}_\beta$ $(\beta = 1, \ldots, \mathfrak{k})$

volles System von Partialeinheiten der Gruppe $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$, so setze ich

) $$w_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{u}_\beta + (1) \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \mathfrak{h};\ 1 \leqq \beta \leqq \mathfrak{k})$$

die α-te Zeile und β-te Spalte und bezeichne das so entstehende hema als eine zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörende Anordnung der rtialeinheiten.

Bei einer Umnumerierung der Partialeinheiten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ ändert h also nur die Reihenfolge der Zeilen bzw. Spalten. Davon abgesehen jeder Zerlegung eindeutig ein Schema zugeordnet.

Hilfssatz XII. *Zwei Partialeinheiten von $\mathfrak{G}$ können nur dann mittelbar verkoppelt sein, wenn sie bei der zu einer beliebigen Zer- ung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden Anordnung entweder in derselben Zeile oder derselben Spalte stehen.*

Beweis. Bildet man aus (47) und einem zu (47) gehörenden v.H.1.D. $\mathfrak{C}$ und aus (48) und einem zu (48) gehörenden v.H. 1.D. in $\mathfrak{D}$ gemäß z XV ein zu

(50) $\qquad \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{u}_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mathfrak{h};\ \beta = 1, \ldots, \mathfrak{k})$

gehörendes v. H. 1. D. in $\mathfrak{G}$, so sind dessen Größen entweder von einem Charakter

$$(\varkappa, \beta;\ \lambda, \beta) \qquad (1 \leqq \beta \leqq \mathfrak{k},\ 1 \leqq \varkappa \leqq \mathfrak{h},\ 1 \leqq \lambda \leqq \mathfrak{h}),$$

oder von einem Charakter

$$(\alpha, \mu;\ \alpha, \nu) \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \mathfrak{h},\ 1 \leqq \mu \leqq \mathfrak{k},\ 1 \leqq \nu \leqq \mathfrak{k}).$$

Nach Hilfssatz I hat dann jede beliebige Größe 1. Dimension in $\mathfrak{G}$ von bestimmtem Charakter in bezug auf (50) einen Charakter $(\varkappa, \beta;\ \lambda, \beta)$ oder $(\alpha, \mu;\ \alpha, \nu)$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (49) gilt daher nach Hilfssatz II das gleiche von einer Größe 1. Dimension in $\mathfrak{G}$ von bestimmtem Charakter in bezug auf die $w_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \ldots, \mathfrak{h};\ \beta = 1, \ldots, \mathfrak{k})$. Die durch sie unmittelbar verkoppelten Partialeinheiten haben also entweder die Form

$$w_{\varkappa\beta}, \quad w_{\lambda\beta}$$

oder

$$w_{\alpha\mu}, \quad w_{\alpha\nu},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz XXV. *Die irreduzible integrable Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze zwei nichttriviale Zerlegungen* (§ 3):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D};$$

(12) $\qquad x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$

und

(26) $\qquad u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k)$

seien wie gewöhnlich volle Systeme von Partialeinheiten der Faktoren $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$,

(47) $\qquad \mathfrak{x}_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mathfrak{h})$

und

(48) $\qquad \mathfrak{u}_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, \mathfrak{k})$

zwei volle Systeme von Partialeinheiten der Faktoren $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$. Dann läßt sich bei geeigneter Numerierung der Partialeinheiten (47) *und* (48) *zu jedem $\alpha = 1, \ldots, h$ eineindeutig ein Wertepaar μ, ν bestimmen*:

$$1 \leqq \mu \leqq e, \quad 1 \leqq \nu \leqq f, \quad h = ef,$$

so daß

(51) $$x_\alpha u_1 = \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{u}_\nu + (1).$$

Beweis. Für $h = 1$ ist die Behauptung trivial, da ja gewiß $x_1 u_1 = \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{u}_\nu + (1)$ ist. Ich kann daher annehmen: $h \geqq 2$. Da $\mathfrak{A}$ nach

tz XXI irreduzibel ist, gibt es nach Satz XXIII eine mit x_1 unmittel- verkoppelte Partialeinheit, etwa x_2. Dann sind nach Hilfssatz IX ch $x_1 u_1$ und $x_2 u_1$ unmittelbar verkoppelt, stehen also nach Hilfssatz XII der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden Anordnung entweder in rselben Zeile oder in derselben Spalte. Ich kann die Bezeichnung der ktoren so gewählt denken, daß die Partialeinheiten in derselben Spalte hen. Nach eventueller Umnumerierung der Partialeinheiten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ stehen dann die Gleichungen

2) $$\begin{cases} x_1 u_1 = \xi_1 u_1 + (1), \\ x_2 u_1 = \xi_2 u_1 + (1). \end{cases}$$

ben sämtliche Größen

3) $$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

ı.-Komponenten nullter Dimension, so ist

$$e = h, \quad f = 1,$$

e Behauptung bewiesen. Im entgegengesetzten Fall betrachte ich das stem aller Partialeinheiten aus (53), die eine $x_1 u_1$ enthaltende Kette n der Eigenschaft bilden, daß jede Partialeinheit dieser Kette eine u_1-Komponente nullter Dimension besitzt. Ohne Beeinträchtigung der rch die Gleichungen (52) festgelegten Bezeichnungen kann ich die merierung so wählen, daß

4) $$x_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

e Partialeinheiten dieses Systems,

5) $$\xi_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

auf Größen 1. Stufe ihre Komponenten sind, so daß also die Glei- ungen bestehen:

6) $$x_\mu u_1 = \xi_\mu u_1 + (1) \qquad (\mu = 1, \ldots, e).$$

rin ist wegen (52): $e \geqq 2$. Da nach Voraussetzung $e < h$ ist, gibt es ch Satz XXIII ein Wertepaar s, t:

7) $$1 \leqq s \leqq e < t \leqq h,$$

daß $x_s u_1$ und $x_t u_1$ unmittelbar verkoppelt sind. Nach Hilfssatz XII hen sie daher auch in der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden An- dnung entweder in derselben Spalte oder in derselben Zeile. Nun steht ch bei dieser Anordnung wegen (56) und (57) $x_s u_1$ in der ersten Spalte d s-ten Zeile. $x_t u_1$ steht nicht in der ersten Spalte, da es nach der finition des Systems (54) keine $\mathfrak{C}u_1$-Komponente nullter Dimension sitzt. Folglich steht es in der s-ten Zeile. Nun ist die Numerierung

der Partialeinheiten von $\mathfrak{D}$ bis auf u_1 noch willkürlich. Daher kann ich setzen

$$x_t u_1 = \xi_s u_2 + (1).$$

Nach Hilfssatz VIII gibt es daher in $\mathfrak{G}$ eine $\xi_s u_1$ und $\xi_s u_2$ verkoppelnde Größe. Diese kann nach Hilfssatz I und Satz XV in der Form $\xi_s \mathfrak{v}$ angenommen werden, wo $\mathfrak{v}$ eine Größe 1. Dimension von $\mathfrak{D}$ ist. Folglich sind auch die Partialeinheiten $\xi_\mu u_1$ und $\xi_\mu u_2$ unmittelbar verkoppelt, nämlich durch $\xi_\mu \mathfrak{v}$. Benutze ich dies für $\mu = 1, \ldots, e$, so folgt aus (56), Hilfssatz VIII und Hilfssatz XII, daß bei der der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entsprechenden Anordnung jedes xu, das bis auf Größen 1. Stufe ein $\xi_\mu u_2$ $(\mu = 1, \ldots, e)$ als Komponente besitzt, entweder in der ersten Spalte oder in der μ-ten Zeile steht. Eines dieser xu, nämlich $x_t u_1$, steht gewiß in der ersten Spalte und zwar in der Zeile $t > e$. Folglich stehen auch diejenigen der μ Partialeinheiten xu, die mit ihm unmittelbar verkoppelt sind, in der ersten Spalte; denn sonst wären wegen $\mu \leqq e < t$ zwei diagonalstehende Partialeinheiten unmittelbar verkoppelt, was dem Hilfssatz XII widersprechen würde. Da die e oberen Plätze der ersten Spalte durch die Partialeinheiten (54) besetzt sind, stehen sie gewiß unterhalb der e-ten Zeile. Nun lassen sich nach Definition des Systems (54) diese Partialeinheiten (54) und folglich wegen (56) auch die Partialeinheiten (55) ohne Hinzunahme weiterer Partialeinheiten als Kette schreiben. Wegen des Isomorphismus der Gruppen $\mathfrak{C}u_1$ und $\mathfrak{C}u_2$ gilt daher das gleiche von den Partialeinheiten

$$\xi_\mu u_2 \qquad (\mu = 1, \ldots, e) \tag{58}$$

und deshalb von den xu, in deren Komponenten sie auftreten. Folglich läßt sich sukzessive zeigen, daß diese xu bei der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gehörenden Anordnung in der ersten Spalte stehen. Da voneinander verschiedene Partialeinheiten (58) anderseits in den Komponenten voneinander verschiedener xu_1 auftreten müssen, ist $2e \leqq h$, und bei eventueller Abänderung der Numerierung der Partialeinheiten (53) für $\alpha > e$ kann man setzen:

$$x_{e+\mu} u_1 = \xi_\mu u_2 + (1) \qquad (\mu = 1, \ldots, e). \tag{59}$$

Ist $h = 2e$, so ist der Beweis erbracht.

Jedenfalls bilden die Partialeinheiten (59) ein System von den gleichen Eigenschaften in bezug auf die $\mathfrak{C}u_2$-Komponenten wie das System (54) in bezug auf die $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten, d. h.

1. sie besitzen sämtlich $\mathfrak{C}u_2$-Komponenten nullter Dimension,
2. sie lassen sich, eventuell mit Wiederholung, zu einer Kette ordnen,
3. (53) besitzt keine weitere mit einer Größe aus (59) unmittelbar verkoppelte Partialeinheit, die eine $\mathfrak{C}u_2$-Komponente nullter Dimension besitzt.

Daß die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, wurde bereits gezeigt. Bedingung 3. ist erfüllt, weil sonst das System (54) aus Symmetrienden auch mehr als e Partialeinheiten enthielte.

Ist $2e < h$, so enthält (53) nach Satz XXIII mindestens eine Partialheit $x_\tau u_1$ $(\tau > 2e)$, die mit einer Partialeinheit $x_\sigma u_1$ $(\sigma \leqq 2e)$ unmittelverkoppelt ist. Wegen der Symmetrie der Systeme (54) und (59) an ich annehmen: $\sigma \leqq e$. Nach der Definition des Systems (54) bet dann $x_\tau u_1$ keine $\mathfrak{C}u_1$-Komponente nullter Dimension. Es hat aber ch keine $\mathfrak{C}u_2$-Komponente nullter Dimension, denn wegen der Gleiungen (59) wäre dann

$$x_\tau u_1 = \xi_\varrho u_2 + (1),$$

$\varrho > e$.

Dann wären aber in der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden Annung die diagonal stehenden Partialeinheiten $\xi_\sigma u_1$ und $\xi_\varrho u_2$ unmittelverkoppelt, was unmöglich ist. — Da nun aber jede Partialeinheit $\mathfrak{G}$ in genau einer der Gruppen $\mathfrak{C}u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \mathfrak{k})$ eine Komponente lter Dimension besitzt, so hat $x_\tau u_1$ bei passender Numerierung der ch nicht festgelegten Partialeinheiten von $\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{C}u_3$-Komponente lter Dimension. Daher kann ich entsprechend wie oben schließen und le: $3e \leqq h$, und bei eventueller Abänderung der Indizes von (53) $\alpha > 2e$:

$$x_{2e+\mu} u_1 = \xi_\mu u_3 + (1) \qquad (\mu = 1, \ldots, e).$$

tigenfalls so fortfahrend, erhalte ich die Behauptung.

Zusatz. *Bezeichnen*

$$x_{a_\nu} u_1 \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

f *Partialeinheiten aus* (53): $x_\alpha u_1$ $(\alpha + 1, \ldots, h)$ *von der Form*

$$x_{a_\nu} u_1 = \xi_1 u_\nu + (1) \qquad (\alpha_1 = 1),$$

lassen sich für $f > 1$ *die Partialeinheiten* (60) (*eventuell mit Wiederungen*) *als Kette anordnen.*

Beweis. Für $f > 1$ waren beim Beweis von Satz XXV aus (53) ei unmittelbar verkoppelte Partialeinheiten $x_s u_1$ und $x_t u_1$ herausriffen, von der Form

$$x_s u_1 = \xi_s u_1 + (1),$$
$$x_t u_1 = \xi_s u_2 + (1).$$

Nach Hilfssatz VIII sind dann auch $\xi_s u_1$ und $\xi_s u_2$ unmittelbar verpelt, wegen des Isomorphismus der Gruppen $\xi_s \mathfrak{D}$ und $\xi_1 \mathfrak{D}$ also auch u_1 und $\xi_1 u_2$. Nochmalige Anwendung des Hilfssatzes VIII ergibt wegen), daß auch $x_{a_1} u_1$ und $x_{a_2} u_1$ unmittelbar verkoppelt sind. Für $f = 2$

ist die Behauptung also bewiesen. Für $f > 2$ waren $x_\sigma u_1$ und $x_\tau u_1$ unmittelbar verkoppelt, wo

$$x_\sigma u_1 = \mathfrak{x}_\mu u_1 + (1)$$

oder

$$x_\sigma u_1 = \mathfrak{x}_\mu u_2 + (1)$$

und

$$x_\tau u_1 = \mathfrak{x}_\mu u_3 + (1) \qquad (1 \leqq \mu \leqq e)$$

Die entsprechenden Schlüsse ergeben daher, daß $x_{\alpha_2} u_1$ entweder mit $x_{\alpha_1} u_1$ oder mit $x_{\alpha_3} u_1$ unmittelbar verkoppelt ist. Fährt man nötigenfalls so fort, so erhält man die Behauptung.

Anmerkung. Die Behauptung gilt aus Symmetriegründen auch für diejenigen Größen aus (53), die $\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{D}$-Komponenten nullter Dimension besitzen ($\mu \leqq e$).

Hilfssatz XIII. *Haben unter den Voraussetzungen des Satzes* XXV *sämtliche Partialeinheiten des vollen Systems*

$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h) \tag{53}$$

von $\mathfrak{A} u_1$ *— und nur diese —* $\mathfrak{C} u_1$*-Komponenten nullter Dimension, die so numeriert seien, daß*

$$x_\alpha u_1 = \mathfrak{x}_\alpha u_1 + (1) \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

ist, so lassen sich die Partialeinheiten von $\mathfrak{D}$ *so numerieren, daß allgemein gilt*

$$x_\alpha u_\beta = \mathfrak{x}_\alpha u_\beta + (1) \quad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k).$$

Beweis. Die Anzahl der Partialeinheiten eines vollen Systems von $\mathfrak{G}$ ist eine Invariante der Gruppe und nach Satz XV $= hk$. Aus der Voraussetzung folgt, daß ein volles System von Partialeinheiten von $\mathfrak{C}$ genau h Größen enthält; mithin ein volles System von Partialeinheiten von $\mathfrak{D}$ genau k Größen. Ist $k = 1$, so fällt die Behauptung also mit der Voraussetzung zusammen. Ich kann daher annehmen: $k \geqq 2$. Wende ich den Satz XXV an (auf eine der Untergruppen $x_\alpha \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, $1 \leqq \alpha \leqq h$, an Stelle von $\mathfrak{A} u_1$), so erhalte ich: Jede der k Partialeinheiten $x_\alpha u_\beta$, $\beta = 1, \ldots, k$, hat die Gestalt

$$x_\alpha u_\beta = \mathfrak{x}_\mu u_\nu + (1).$$

Dabei sind für μ gewisse e' der Zahlen $1, \ldots, h$, für ν gewisse f' der Zahlen $1, \ldots, k$ zulässig:

Nun ist

$$e' f' = k.$$

$$x_\alpha u_1 = \mathfrak{x}_\alpha u_1 + (1),$$

und diese Partialeinheit ist nach Voraussetzung die einzige unter den k Partialeinheiten, die in der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden An-

nung in der ersten Spalte steht. Mithin ist $e' = 1$, also $f' = k$. Folg- stehen die Partialeinheiten $x_\alpha u_\beta$ $(\beta = 1, \ldots, k)$ auch bei der Zer- ung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sämtlich in der α-ten Zeile. Dies gilt für jedes $\alpha \leqq h$. ein festes α kann daher die Numerierung der u_β so getroffen werden, die Behauptung erfüllt ist. Im Falle $h = 1$ ist sie daher bewiesen. $h > 1$ ergibt nochmalige Anwendung des Satzes XXV auf die Partial- heiten $x_\alpha u_\beta$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ der Gruppe $\mathfrak{A} u_\beta$ für jedes $\beta > 1$, daß e Partialeinheiten auch bei der zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ gehörenden rdnung in der β-ten Spalte stehen. Also ist allgemein

$$x_\alpha u_\beta = \xi_\alpha u_\beta + (1).$$

Hilfssatz XIV. *Unter Beibehaltung der Bezeichnung des vorigen zes sei $y' u_1$ eine Größe 1. Dimension in $\mathfrak{A} u_1$ von bestimmtem Cha- ter in bezug auf die Partialeinheiten* (53). *Sie habe die Gestalt*

$$y' u_1 = \eta' u_1 + (2),$$

η' eine Größe 1. Dimension in $\mathfrak{C}$ von bestimmtem Charakter in bezug die Partialeinheiten ξ_μ $(\mu = 1, \ldots, e)$ ist. Dann enthält $\mathfrak{A} u_1$ auch ßen der Gestalt

$$y^{(\nu)} u_1 = \eta' u_\nu + (2) \qquad (\nu = 1, \ldots, f),$$

die $y^{(\nu)} u_1$ von bestimmtem Charakter in bezug auf (53) *sind.*

Beweis. Da die Behauptung für $f = 1$ trivial ist, kann ich an- men: $f \geqq 2$. Ich unterscheide dann zwei Fälle:

1. $y' u_1$ ist von schiefem Charakter[17]), etwa vom Charakter $(1, 1; 2, 1)$ bezug auf die Partialeinheiten (53). Dann ist $\eta' u_1$ ebenfalls von efem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten

$$\xi_\mu u_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, \mathfrak{h};\ \nu = 1, \ldots, \mathfrak{k})$$

zwar als Größe aus $\mathfrak{C} u_1$ ebenfalls vom Charakter $(1, 1; 2, 1)$, n man setzt:

$$x_\mu u_1 = \xi_\mu u_1 + (1).$$

glich sind die Größen $\eta' u_\nu$ vom Charakter $(1, \nu; 2, \nu)$ in bezug auf Partialeinheiten (64) und als Größen 1. Dimension in $\mathfrak{C} u_\nu$ ebenfalls 1. Dimension in $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$.

Ist die Numerierung der Partialeinheiten (53) so gewählt, daß

$$\begin{cases} \xi_1 u_\nu = x_{\alpha_\nu} u_1 + (1) \\ \xi_2 u_\nu = x_{\beta_\nu} u_1 + (1) \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, f),$$

[17]) Die Definition der Begriffe „schiefer und gerader Charakter" siehe bei effers, Mathematische Annalen 39 (1891), S. 313.

wo

$$(66) \qquad \alpha_\nu + \beta_\nu, \qquad 1 \leqq \alpha_\nu \leqq h, \qquad 1 \leqq \beta_\nu \leqq h,$$

so ergeben die Gleichungen (65):

$$(67) \qquad \mathfrak{y}' u_\nu = \mathfrak{x}_1 u_\nu \mathfrak{y}' u_\nu \mathfrak{x}_2 u_\nu = z + (2),$$

wo z eine Größe 1. Dimension in $\mathfrak{G}$ vom Charakter $(\alpha_\nu, 1; \beta_\nu, 1)$ in be zug auf die Partialeinheiten (53) ist. Eine derartige Größe hat wegen (66) aber notwendig die Gestalt

$$(68) \qquad z = y^{(\nu)} u_1 + (2),$$

wo $y^{(\nu)} u_1$ eine Größe 1. Dimension in $\mathfrak{A} u_1$ ist. Einsetzen von (68) in (67) ergibt daher die Behauptung.

2. $y' u_1$ sei von geradem Charakter, etwa $(1, 1; 1, 1)$ in bezug auf (53). Dann ist wegen (56) auch $\mathfrak{y}' u_1$ vom Charakter $(1, 1; 1, 1)$ in bezug auf die Partialeinheiten (64); $\mathfrak{y}' u_\nu$ also vom Charakter $(1, \nu; 1, \nu$ in bezug auf (64); es läßt sich deshalb (für $\nu \leqq f$), wegen (65) in der Form darstellen:

$$(69) \qquad \mathfrak{y}' u_\nu = z + (2),$$

wo z eine Größe 1. Dimension in $\mathfrak{G}$ vom Charakter $(\alpha_\nu, 1; \alpha_\nu, 1)$ ist in bezug auf (53). z könnte daher eine Komponente 1. Dimension in den Gruppen $\mathfrak{A} u_1$ und $x_{\alpha_\nu} \mathfrak{B}$ haben, ist also von der Gestalt:

$$(70) \qquad z = y^{(\nu)} u_1 + x_{\alpha_\nu} v^{(\nu)} + (2),$$

wo $y^{(\nu)}$ eine Größe aus $\mathfrak{A}$, $v^{(\nu)}$ eine Größe aus $\mathfrak{B}$ ist.

Setze ich (70) in (69) ein, so folgt:

$$(71) \qquad \mathfrak{y}' u_\nu = y^{(\nu)} u_1 + x_{\alpha_\nu} v^{(\nu)} + (2).$$

Der Beweis ist daher erbracht, wenn ich zeige:

$$x_{\alpha_\nu} v^{(\nu)} = (2).$$

Dies ist der Fall, wenn in $\mathfrak{B}$ die Gleichung besteht:

$$v^{(\nu)} = (2).$$

Nach dem Zusatz zu Satz XXV ist $x_1 u_1$ mit mindestens einem $x_{\alpha_\nu} u_1$, etwa mit $x_{\alpha_2} u_1$, unmittelbar verkoppelt. Es existiert daher in $\mathfrak{A} u_1$ eine sie verkoppelnde Größe $y u_1$. Diese hat also entweder den Charakter $(1, 1; \alpha_2, 1)$ oder $(\alpha_2, 1; 1, 1)$. Ich nehme an, sie habe den Charakter $(1, 1; \alpha_2, 1)$. Dann ist wegen (65)

$$(72) \qquad y u_1 = x_1 u_1 \, y u_1 \, x_{\alpha_2} u_1 = \mathfrak{x}_1 u_1 \, y u_1 \, \mathfrak{x}_1 u_2 + (2) = z + (2).$$

Darin ist z als Größe 1. Dimension von dem schiefen Charakter

1; 1, 2) in bezug auf die Partialeinheiten (64) bis auf Größen 2. Stufe
e Größe aus $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{D}$, kann deshalb in der Form geschrieben werden

$$z = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{v} + (2),$$

$\mathfrak{v}$ eine Größe aus $\mathfrak{D}$ ist. Setzt man dies in die Gleichung (72) ein, erhält man:

$$y u_1 = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{v} + (2).$$

Aus (62) und (72) folgt:

$$y' u_1 y u_1 = \mathfrak{y}' u_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{v} + (3).$$

Berücksichtigt man die Vertauschbarkeit von Größen, die verschiede-
Faktoren einer Zerlegung von $\mathfrak{G}$ angehören, so folgt aus (74):

$$y' y u_1 = \mathfrak{y}' \mathfrak{v} + (3).$$

Entsprechend erhält man aus (72) und — für $\nu = 2$ — aus (71):

$$y u_1 (y^{(2)} u_1 + x_{\alpha_2} v^{(2)}) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{v} \mathfrak{y}' u_2 + (3)$$

$$y y^{(2)} u_1 + y v^{(2)} = \mathfrak{v} \mathfrak{y}' + (3).$$

Da aus dem angegebenen Grunde $\mathfrak{v} \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}' \mathfrak{v}$ ist, so ergibt Subtrak-
der Gleichung (75) von (76)

$$(y y^{(2)} - y' y) u_1 + y v^{(2)} = (3).$$

Gehe ich in (77) zur $\mathfrak{A} u_1$-Komponente über und subtrahiere die
entstehende Gleichung von (77), so bleibt:

$$y v^{(2)} = (3).$$

st nach Definition gewiß von der 1. Dimension in $\mathfrak{A}$. Das Produkt
r Größe 1. Dimension in $\mathfrak{A}$ mit einer Größe 1. Dimension in $\mathfrak{B}$ ist
r nach Definition des Produkts von der 2. Dimension in $\mathfrak{G}$. Da $v^{(2)}$
e Größe aus $\mathfrak{B}$ ist, so ist

$$v^{(2)} = (2).$$

Wäre $y u_1$ vom Charakter $(\alpha_2, 1; 1, 1)$ gewesen, so wäre ich durch
tauschung der Faktoren zum gleichen Ergebnis gelangt. Für $f = 2$
der Beweis daher erbracht.

Ist dagegen $f > 2$, so ist nach dem Zusatz XXV $x_{\alpha_1} u_1$ oder $x_{\alpha_2} u_1$
einem $x_{\alpha_\nu} u_1$ $(\nu > 2)$, etwa mit $x_{\alpha_3} u_1$, unmittelbar verkoppelt. Dann
n ich analog schließen; da die Partialeinheiten $x_{\alpha_\nu} u_1$ $(\nu = 1, \ldots, f)$
Kette bilden, kann ich die Behauptung schrittweise für jedes
$1, \ldots, f$ beweisen.

Zusatz. *Enthält* $\mathfrak{A}u_1$ *eine Größe* $z'u_1$ 1. *Dimension von bestimmtem Charakter in bezug auf* (53): $x_\alpha u_1$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ *von der Gestalt*

$$z'u_1 = \mathfrak{x}_1 v' + (2), \tag{79}$$

wo $\mathfrak{v}'$ *von bestimmtem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten* u_ν $(\nu = 1, \ldots, f)$ *von* $\mathfrak{D}$ *ist, so besitzt* $\mathfrak{A}u_1$ *auch Größen der Gestalt*

$$z^{(\mu)}u_1 = \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{v}' + (2) \qquad (\mu = 1, \ldots, e) \tag{80}$$

wo die $z^{(\mu)}u_1$ *von bestimmtem Charakter in bezug auf* (53) *sind.*

Hilfssatz XV. *Die Anzahl der* $\mathfrak{C}u_1$*-Komponenten 1. Dimension besitzenden Größen eines zu einem vollen System von Partialeinheiten gehörenden p.v.H.1.D. in* $\mathfrak{A}u_1$ *ist unabhängig von der speziellen Wahl dieses Systems.*

Beweis.

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{81}$$

und

$$z_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{82}$$

seien zwei beliebige, zu dem vollen System von Partialeinheiten (53) gehörende p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}u_1$. Der Beweis ist erbracht, wenn ich zeige, daß die Anzahl der zu einem festen Charakter gehörenden Größen mit $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten erster Dimension unabhängig von der Wahl des p.v.H.1.D. ist.

Es bestehen die Gleichungen

$$z_\varrho u_1 = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{\varrho\sigma} y_\sigma u_1 + (2) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{83}$$

Da $|c_{\varrho\sigma}| \neq 0$ ist, so ist auch in der Entwicklung der Determinante mindestens ein Glied von Null verschieden. Ich kann die Größen (82) so numerieren, daß

$$c_{\varrho\varrho} \neq 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{84}$$

Nach dem Zusatz zu Satz XVIII bildet (81) einen Teil eines zu

$$x_\alpha u_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k \tag{28}$$

gehörenden p.v.H.1.D. der Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Das gleiche gilt von (82). Mithin gehört jede Größe dieser Systeme einer und nur einer Abteilung in bezug auf die Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ an (Satz XX). D. h. sie besitzt genau eine Komponente, die einem Hauptsystem 1. Dimension der betreffenden Untergruppe angehört. Mit anderen Worten: keine Linearkombination dieser Komponenten mit von Null verschiedenen Ko

ienten ist von der zweiten Stufe. Mit Rücksicht auf die Gleichungen) und (84) folgt daher, daß $z_\varrho u_1$ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$ zugleich mit $y_\varrho u_1$ eine $_1$-Komponente hat oder nicht, womit der Satz bewiesen ist.

Satz XXVI. *Die irreduzible integrable Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitze die nicht-ialen Zerlegungen*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D},$$

)
$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

ein volles System von Partialeinheiten der Gruppe $\mathfrak{A} u_1$ *von der talt*

$$x_\alpha u_1 = \xi_\mu u_\nu + (1).$$

nn läßt sich ein zu (53) *gehörendes p.v.H.1.D. in* $\mathfrak{A} u_1$ *angeben, sen* $r = pf + qe$ *Größen die Gestalt haben*

)
$$\left\{\begin{array}{l} y_1^{(\nu)} u_1 = \eta_1 u_\nu + (2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_p^{(\nu)} u_1 = \eta_p u_\nu + (2) \end{array}\right\} \qquad (\nu = 1, \ldots, f),$$

)
$$\left\{\begin{array}{l} z_1^{(\mu)} u_1 = \mathfrak{v}_1 u_\mu + (2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_q^{(\mu)} u_1 = \mathfrak{v}_q u_\mu + (2) \end{array}\right\} \qquad (\mu = 1, \ldots, e).$$

bei bedeuten die Größen y_π $(\pi = 1, \ldots, p)$ *Größen* 1. *Dimension in* $\mathfrak{C}$ *bestimmtem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten*

)
$$\xi_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, e);$$

$\mathfrak{v}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, q)$ *Größen* 1. *Dimension in* $\mathfrak{D}$ *von bestimmtem Cha-ter in bezug auf die Partialeinheiten*

)
$$u_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, f).$$

Beweis. $\mathfrak{A}$ ist nach Satz XXI irreduzibel und nach Voraussetzung der Haupteinheit verschieden. Deshalb ist auch in einem zu (53) örenden p.v.H.1.D.

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

$\mathfrak{A} u_1$: $r \geqq 1$. Da (81) zugleich einen Teil eines zu (28): $x_\alpha u_\beta$ ge-enden p.v.H.1.D. von $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bildet, so gehört jede seiner Größen er bestimmten Abteilung (Satz XX) in bezug auf die Zerlegung $= \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ an.

Aus Symmetriegründen kann ich annehmen, (81) enthält mindestens e Größe mit einer $\mathfrak{C} u_1$-Komponente 1. Dimension.

)
$$y'_\pi u. \qquad (\pi = 1, \ldots, p;\ p \geqq 1)$$

sei die Gesamtheit dieser Größen. Sind die $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten der Größen (89) nicht bereits von bestimmtem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten

$$\xi_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e), \tag{55}$$

sondern in bezug auf ein anderes System

$$\xi'_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e),$$

so sind sie doch jedenfalls bis auf Größen 2. Stufe von der Gestalt

$$y_\pi u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p), \tag{90}$$

wo die Größen (90) von bestimmtem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten (55) sind. Für $\nu = 1$ gelten also im vorgelegten p.v.H.1.D. die Gleichungen (85). Folglich existieren nach Hilfssatz XIV in $\mathfrak{A}u_1$ pf Größen von bestimmtem Charakter in bezug auf (53) von der Form (85). Da nach dem Zusatz zu Satz XVIII das vorgelegte p.v.H.1.D. in $\mathfrak{A}u_1$ ein Teilsystem aus einem p.v.H.1.D. in $\mathfrak{G}$ ist, so sind nach Satz XX auch die $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten der Größen (89) ein Teilsystem aus einem p.v.H.1.D. in $\mathfrak{C}u_1$ und zwar in bezug auf die $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten der zugehörigen Partialeinheiten. Da die Hinzufügung einer Größe 2. Stufe den Grad einer Größe nicht ändert, sind auch die Größen (90) ein Teilsystem eines p.v.H.1.D. in $\mathfrak{C}u_1$ von bestimmtem Charakter in bezug auf die Partialeinheiten

$$\xi_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e). \tag{55}$$

Wegen des Isomorphismus der Gruppen $\mathfrak{C}u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, f)$ gilt daher das entsprechende für die Größen

$$\eta_\pi u_\nu \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

in $\mathfrak{C}u_\nu$. Folglich bildet die Gesamtheit dieser pf Größen nach dem Zusatz zu Satz XVIII ein Teilsystem eines p.v.H.1.D. in $\mathfrak{G}$. Da diese Größen sämtlich $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten 1. Dimension besitzen, so bilden diese Komponenten nach Satz XX ein Teilsystem eines p.v.H.1.D. in $\mathfrak{A}u_1$. Das gleiche gilt also von den Größen

$$y_\pi^{(\nu)} u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p;\ \nu = 1, \ldots, f),$$

die sich ja höchstens um Größen 2. Stufe von ihnen unterscheiden. Bilden diese Größen bereits ein p.v.H.1.D., so ist der Beweis erbracht. Im entgegengesetzten Fall ergänze ich sie zu einem zu (53) gehörenden p.v.H.1.D. in $\mathfrak{A}u_1$. Dann tritt gewiß keine weitere Größe mit einer $\mathfrak{C}u_\nu$-Komponente 1. Dimension auf; denn wäre etwa für ein bestimmtes $\nu \leqq f$

$$y_{p+1}^{(\nu)} u_1 = \eta_{p+1} u_\nu + (2)$$

derartige Größe, so ließe sich durch die entsprechende Schlußweise p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}u_1$ angeben, das die Größen

$$y'_\pi u_1 = \mathfrak{y}_\pi u_1 + (2) \qquad (\pi = 1, \ldots, p+1)$$

ielte. Das ist aber nach Definition der Größen (89) wegen Hilfs- XV unmöglich. Daher besitzeu alle weiteren Größen des p.v.H. in $\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{D}$-Komponenten 1. Dimension. Aus Symmetriegründen kann ich en die Gestalt (86) geben. Dadurch wird das System (85) nicht be- rächtigt, denn zur Darstellung des linearen Teils einer Größe mit r $\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{D}$-Komponente 1. Dimension wird ja keine der Größen (85) be- zt. Da sich endlich wegen

$$x_\alpha u_1 = \mathfrak{x}_\mu u_\nu + (1)$$

jeder Größe des p.v.H.1.D. in $\mathfrak{A}u_1$ eine Größe 1. Dimension aus r der Gruppen $\mathfrak{C}u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, f)$ oder $\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{D}$ $(\mu = 1, \ldots, e)$ abspalten , so enthält das die Systeme (85) und (86) umfassende p.v.H.1.D. $\mathfrak{A}u_1$ auch keine weiteren Größen, womit der Satz bewiesen ist.

Die Ergebnisse der Sätze XXV und XXVI lassen sich unter Bei- altung der Bezeichnungen mit Rücksicht auf Satz XV und Satz XIX h folgendermaßen aussprechen:

Satz XXVII. *Sind* $\mathfrak{x}_\mu u_1$ $(\mu = 1, \ldots, e)$ *und* $\mathfrak{y}_\pi u_1$ $(\pi = 1, \ldots, p)$ *Gesamtheit der Größen eines Grundsystems von* $\mathfrak{C}u_1$ *mit* $\mathfrak{A}u_1$- *mponenten 0-ter bzw. 1. Dimension,* $\mathfrak{x}_1 u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, f)$ *und* $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{v}_\varkappa$ $= 1, \ldots, q)$ *die Gesamtheit der Größen eines Grundsystems von* $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{D}$ $\mathfrak{A}u_1$*-Komponenten 0-ter bzw. 1. Dimension, so stellen die* $\mathfrak{A}u_1$- *mponenten der Größen*

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{x}_\mu u_\nu \\ \mathfrak{y}_\pi u_\nu \\ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{v}_\varkappa \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\mu = 1, \ldots, e;\ \nu = 1, \ldots, f); \\ (\pi = 1, \ldots, p;\ \varkappa = 1, \ldots, q) \end{matrix}$$

Größen eines Grundsystems von $\mathfrak{A}u_1$ *dar.*

Hilfssatz XVI. *Enthält ein beliebiges zu*

$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

örendes p.v.H.1.D. in $\mathfrak{A}u_1$ *zwei Größen aus verschiedenen, zu der legung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ *gehörenden Abteilungen (Satz* XX*), so ist in einem äß Satz* XXVI *gewählten p.v.H.1.D. in* $\mathfrak{A}u_1$:

$$p > 0, q > 0.$$

Beweis. Hat von den vorgegebenen Größen die eine eine $\mathfrak{C}u_\nu$- mponente 1. Dimension, die andere eine $\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{D}$-Komponente 1. Dimen- , so folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz XXVI und Hilfs- XII. Gehören dagegen beide Größen derselben Klasse von Satz XX

an, so kann ich aus Symmetriegründen annehmen, die eine habe eine $\mathfrak{C}\,u_1$ - Komponente 1. Dimension, die andere eine $\mathfrak{C}\,u_2$ - Komponente 1. Dimension. Es ist daher $f \geqq 2$. Nach dem Zusatz zu Satz XXV bilden also, unter Benutzung der Bezeichnungen

$$x_{\alpha_\nu} u_1 = \mathfrak{x}_1 u_\nu + (1), \tag{61}$$

die Partialeinheiten $x_{\alpha_\nu} u_1$ $(\nu = 1, \ldots, f)$ eine Kette. Folglich sind auch zwei von ihnen unmittelbar verkoppelt, etwa: $x_{\alpha_\varkappa} u_1$, $x_{\alpha_\lambda} u_1$; $\varkappa \leqq f$, $\lambda \leqq f$, $\varkappa \neq \lambda$. Es gibt daher bei geeigneter Wahl von $\varkappa$ und λ in $\mathfrak{A}\,u_1$ eine Größe 1. Dimension vom Charakter $(\alpha_\varkappa, 1; \alpha_\lambda, 1)$ in bezug auf (53). Diese besitzt aber notwendig eine $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{D}$ - Komponente 1. Dimension vom Charakter $(1, \varkappa; 1, \lambda)$; also besitzt auch das p.v.H. 1.D. in $\mathfrak{A}\,u_1$ eine solche Größe. Die Voraussetzungen des ersten Falles sind also erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

Hilfssatz XVII. *Die irreduzible integrable Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze die nichttrivialen Zerlegungen $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$. Bilden dann die $\mathfrak{C}\,u_1$ - Komponenten der Größen*

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{81}$$

des p.v.H. 1.D. von $\mathfrak{A}\,u_1$ ein p.v.H. 1.D. in $\mathfrak{C}\,u_1$, so bilden die $\mathfrak{C}\,u_1$ - Komponenten der Größen

$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h) \tag{53}$$

des vollen Systems von Partialeinheiten in $\mathfrak{A}\,u_1$ ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\,u_1$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$, und folglich auch $\mathfrak{A}\,u_1$, nach Satz XXI irreduzibel ist, gibt es nach Satz XXIII zu jedem $x_\alpha u_1$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ eine Größe $y_\varrho u_1$ aus (81), so daß eine der Gleichungen besteht:

$$x_\alpha u_1 y_\varrho u_1 = y_\varrho u_1$$

oder

$$y_\varrho u_1 x_\alpha u_1 = y_\varrho u_1.$$

Bezeichne ich daher die $\mathfrak{C}\,u_1$ - Komponenten der $x_\alpha u_1$ mit $\mathfrak{x}_\alpha u_1$, die der $y_\varrho u_1$ mit $\mathfrak{y}_\varrho u_1$, so folgt durch Übergang zu den $\mathfrak{C}\,u_1$ - Komponenten eine der beiden Gleichungen

$$\mathfrak{x}_\alpha u_1 \mathfrak{y}_\varrho u_1 = \mathfrak{y}_\varrho u_1$$

oder

$$\mathfrak{y}_\varrho u_1 \mathfrak{x}_\alpha u_1 = \mathfrak{y}_\varrho u_1.$$

Da die $\mathfrak{y}_\varrho u_1$ nach Voraussetzung von 1. Dimension sind, so sind die $\mathfrak{x}_\alpha u_1$ von nullter Dimension. Aus Satz XIX folgt daher, daß die Größen $\mathfrak{x}_\alpha u_1$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\,u_1$ sind. Die Anzahl der Größen in einem vollen System von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\,u_1$ ist daher $\geqq h$. Da

ererseits sämtliche Größen des p.v H.1.D. von $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ $\mathfrak{A}u_1$-Kompo-ten 1. Dimension besitzen, kann ich entsprechend schließen, daß sämt-e Größen eines vollen Systems von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ $\mathfrak{A}u_1$-mponenten nullter Dimension haben, die einem vollen System von tialeinheiten in $\mathfrak{A}u_1$ angehören. Mithin enthält das volle System von tialeinheiten in $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ genau h Größen, d. h. die Größen $\xi_\alpha \mathfrak{u}_1$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ len ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$, w. z. b. w.

Satz XXVIII. *Die irreduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze die nicht-trivialen legungen $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Haben dann die Größen*

) $$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

es p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}u_1$ die Größen eines p.v.H.1.D. von $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ zu mponenten, so läßt sich die Numerierung der Partialeinheiten in $\mathfrak{C}$ l $\mathfrak{D}$ so treffen, daß die Größen eines Grundsystems der Gruppen $_\beta$ $(\beta = 1, \ldots, k)$ und $x_\alpha \mathfrak{B}$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$, die Größen eines Grund-tems der Gruppen $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_\beta$ $(\beta = 1, \ldots, k)$ bzw. $\xi_\alpha \mathfrak{D}$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$ zu mponenten haben.

Beweis. Es genügt, wenn ich zeige, daß die Größen des Grund-tems die Gesamtheit der Größen mit Komponenten nullter bzw. erster nension in der betreffenden Untergruppe sind; daß diese Komponenten n ein Grundsystem bilden, folgt aus Satz XIX. Da die Voraus-zungen des Hilfssatzes XVII erfüllt sind, lassen sich die Partialeinheiten $\mathfrak{C}$ so numerieren, daß die Gleichungen bestehen:

$$x_\alpha u_1 = \xi_\alpha u_1 + (1) \qquad (\alpha = 1, \ldots, h),$$

die $\xi_\alpha \mathfrak{u}_1$ ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ bilden. Folglich en sich nach Hilfssatz XIII die Partialeinheiten von $\mathfrak{D}$ so numerieren, allgemein die Gleichungen bestehen

) $$x_\alpha u_\beta = \xi_\alpha u_\beta + (1) \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k),$$

die u_β $(\beta = 1, \ldots, k)$ ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{D}$ l. Für die Größen nullter Dimension aus den Grundsystemen ist die auptung demnach bereits bewiesen. — Ich beweise nun, daß für jedes ebige, aber feste α $(1 \leqq \alpha \leqq h)$ die Größen des p.v.H.1.D. von $x_\alpha \mathfrak{B}$

) $$x_\alpha v_\sigma \qquad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

Größen eines p.v.H.1.D. von $\xi_\alpha \mathfrak{D}$ zu Komponenten besitzen. Die ßen (92) haben einen Charakter $(\alpha, \beta; \alpha, \gamma)$ $(1 \leqq \beta \leqq k,\ 1 \leqq \gamma \leqq k)$. den Gleichungen (91) folgt daher, daß die Größen schiefen Charakters (92) — falls solche existieren — gewiß $\xi_\alpha \mathfrak{D}$-Komponenten 1. Di-nsion haben. Dasselbe gilt aber auch für die Größen geraden Charakters, n diese könnten — wiederum wegen (91) — höchstens eine $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_\beta$-

Komponente 1. Dimension haben. Dann würde aber Anwendung des Hilfssatzes XIV auf die Gruppe $x_\alpha \mathfrak{B}$ wegen (91) ergeben, daß (92) auch eine Größe mit einer $\mathfrak{C}u_1$-Komponente 1. Dimension enthalten müßte. Das widerspricht der Voraussetzung. Mithin haben sämtliche Größen (92) $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{D}$-Komponenten 1. Dimension. Bildeten diese kein p.v.H.1.D. von $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{D}$, so enthielte ein solches, wie man entsprechend zeigt, eine Größe geraden Charakters mit einer $\mathfrak{A}u_\beta$-Komponente 1. Dimension. Sinngemäße Anwendung des Hilfssatzes XIV ergäbe dann, daß das p.v.H.1.D. von $x_\alpha \mathfrak{D}$ auch eine Größe mit einer $\mathfrak{A}u_1$-Komponente 1. Dimension enthielte. Daraus folgt umgekehrt, daß unter den Größen (81) eine Größe mit einer $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{D}$-Komponente 1. Dimension vorkommen müßte, entgegen der Voraussetzung. Folglich sind die Größen (92) die Gesamtheit der Größen mit $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{D}$-Komponenten 1. Dimension. Ich kann daher in der Voraussetzung des Satzes die Größen (81) durch die Größen $x_1 v_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$, die Gruppe $\mathfrak{C}u_1$ durch die Gruppe $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{D}$ ersetzen und dann ganz entsprechend schließen: Für jedes beliebige β $(1 \leqq \beta \leqq k)$ sind die Größen $y_\varrho u_\beta$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ die Gesamtheit der Größen mit $\mathfrak{C}u_\beta$-Komponenten 1. Dimension. Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

§ 7.

Der Zerlegungssatz.

Definition IX. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt zu der Gruppe Γ homomorph, wenn jeder Größe aus $\mathfrak{G}$ genau eine Größe aus Γ, jeder Größe aus Γ eine endliche oder unendliche (nicht leere) Menge von Größen aus $\mathfrak{G}$ entspricht; und zwar sollen, wenn A und B Größen aus $\mathfrak{G}$, α und β die entsprechenden Größen aus Γ sind, den Größen $c \cdot A$ $(c = \text{const})$, $A + B$ und $A \cdot B$ die Größen $c \cdot \alpha$, $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ zugeordnet sein*[18]. *— Ist auch jeder Größe aus Γ genau eine Größe aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet, so heißen die Gruppen holoedrisch homomorph oder isomorph.*

Hilfssatz XVIII. *Ist $\mathfrak{G}$ zu Γ homomorph, und sind m und μ die endlichen Ordnungen von $\mathfrak{G}$ bzw. Γ, so ist*

$$m \geqq \mu.$$

Beweis. Bilden $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, und sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ die zugeordneten Größen in Γ, so läßt sich jede Größe in $\mathfrak{G}$ in der Form darstellen:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k e_k,$$

[18]) Offenbar ist der Homomorphismus reflexiv und transitiv.

die c_k Konstanten bedeuten. Folglich läßt sich die entsprechende
ße in Γ in der Form darstellen:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k .$$

nun jeder Größe in Γ mindestens eine Größe in $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist,
n ich jede Größe von Γ in dieser Form darstellen. Wähle ich daher
den Größen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ die Maximalzahl der linear unabhängigen aus,
kann ich mit ihrer Hilfe jede Größe aus Γ linear darstellen, d. h. diese
ßen bilden eine Basis von Γ. Ihre Anzahl μ ist also $\leqq m$, w. z. b. w.

Hilfssatz XIX. *Ist $\mathfrak{G}$ zu Γ homomorph, und ist die Ordnung m
$\mathfrak{G}$ gleich der Ordnung μ von Γ, so ist $\mathfrak{G}$ zu Γ isomorph.*

Beweis. Da ich, unter Benutzung der Bezeichnungen von Hilfs-
XVIII, jede Größe in Γ durch $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ linear darstellen kann, so
nen diese wegen $\mu = m$ nicht linear abhängig sein; sie bilden also
Basis. Angenommen, den beiden Größen aus $\mathfrak{G}$

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k e_k , \qquad B = \sum_{k=1}^{m} b_k e_k$$

preche dieselbe Größe α in Γ. Wegen des Homomorphismus gilt dann

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m} a_k \varepsilon_k , \qquad \alpha = \sum_{k=1}^{m} b_k \varepsilon_k$$

folglich

$$0 = \sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \varepsilon_k .$$

der Definition der Basis folgt daher

$$a_k = b_k \qquad (k = 1, \ldots, m),$$
$$A = B .$$

hin entspricht auch jeder Größe aus Γ genau eine Größe in $\mathfrak{G}$, w. z. b. w.

Ich betrachte nun wieder, unter Benutzung der üblichen Bezeich-
gen, ein zu

$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

örendes p.v.H.1.D.

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

$\mathfrak{A} u_1$ und nehme an, dieses enthalte Größen mit $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten
Dimension. Dann gilt nach Hilfssatz XV das gleiche von jedem anderen
H.1.D. in $\mathfrak{A} u_1$.

(93) $$y_\pi u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

sei die Gesamtheit der Größen (81) mit $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten 1. Dimension,

(94) $$\eta_\pi u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

seien diese Komponenten, so daß die Gleichungen bestehen:

(95) $$y_\pi u_1 = \eta_\pi u_1 + (2) \qquad (\pi = 1, \ldots, p).$$

Hat $y_\pi u_1$ den Charakter $(\alpha_\pi, 1; \beta_\pi, 1)$, so besitzen die Partialeinheiten x_{α_π} und x_{β_π} $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten 0-ter Dimension, was man wie beim Beweis von Hilfssatz XVII erhält. Die Partialeinheiten (53) seien so geordnet, daß

(96) $$x_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

die Gesamtheit der Partialeinheiten mit $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten 0-ter Dimension ist;

(97) $$\xi_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

seien diese Komponenten, so daß die Gleichungen bestehen

(98) $$x_\mu u_1 = \xi_\mu u_1 + (1) \qquad (\mu = 1, \ldots, e).$$

Ich bezeichne noch die durch (96) und (93) erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{A} u_1$ mit $\mathfrak{A}_1 u_1$, die durch (97) und (94) erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{C} u_1$ mit $\mathfrak{C}_1 u_1$. Daß $\mathfrak{A}_1 u_1$ eine Gruppe im eigentlichen Sinne ist, also eine Haupteinheit besitzt, schließt man leicht aus der Tatsache, daß zugleich mit $y_\pi u_1$ auch $x_{\alpha_\pi} u_1$ und $x_{\beta_\pi} u_1$ zu $\mathfrak{A}_1 u_1$ gehören. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{C}_1 u_1$. Doch ist die Existenz der Haupteinheit im folgenden ohne Belang. Die Gruppe $\mathfrak{A}_1 u_1$ hat als Untergruppe von $\mathfrak{A} u_1$ eine endliche Ordnung m_1. Da sich zu jedem Grundsystem von $\mathfrak{A} u_1$ in der angegebenen Weise eine Untergruppe $\mathfrak{A}_1 u_1$ bestimmen läßt, so kann ich definieren:

Definition X. *Ein Grundsystem von $\mathfrak{A} u_1$ heiße ausgezeichnet in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{C} u_1$ von $\mathfrak{G}$, wenn die Ordnung m_1 von $\mathfrak{A}_1 u_1$ den kleinsten unter den möglichen Werten annimmt.*

Anmerkung. Offenbar ist ein in bezug auf $\mathfrak{C} u_1$ ausgezeichnetes Grundsystem auch in bezug auf $\mathfrak{C} u_1'$ ausgezeichnet, wenn $u_1' = u_1 + (1)$ ist. Denn hat die Größe $A u_1$ aus $\mathfrak{A} u_1$ die $\mathfrak{C} u_1$-Komponente $C u_1$, so hat, wie leicht einzusehen, ihre $\mathfrak{C} u_1'$-Komponente die Gestalt $C u_1'$. Die Gesamtheit der Größen des Grundsystems von $\mathfrak{A} u_1$ mit $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten 0-ter bzw. 1. Dimension stellt daher zugleich die Gesamtheit der Größen mit $\mathfrak{C} u_1'$-Komponenten 0-ter bzw. 1. Dimension dar. Da man genau so von den $\mathfrak{C} u_1'$-Komponenten auf die $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten schließen kann, folgt die Behauptung unmittelbar. Dann gilt

Satz XXIX. *Ist das aus*

) $x_\alpha u_1$ $(\alpha = 1, \ldots, h)$

l

) $y_\varrho u_1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$

tehende Grundsystem von $\mathfrak{A} u_1$ *ausgezeichnet in bezug auf* $\mathfrak{C} u_1$, *so ist durch* (96) *und* (93) *erzeugte Gruppe* $\mathfrak{A}_1 u_1$ *zu der durch* (97) *und*) *erzeugten Gruppe* $\mathfrak{C}_1 u_1$ *isomorph.*

Beweis. Ich ordne jeder Größe aus $\mathfrak{A}_1 u_1$ ihre — eindeutig be-nmte — $\mathfrak{C} u_1$-Komponente zu. Da sich jede Größe in $\mathfrak{A}_1 u_1$ ganz ional durch die Größen (96) und (93) ausdrückt, so läßt sich nach fssatz V ihre $\mathfrak{C} u_1$-Komponente ganz rational durch die Größen (97) d (94) darstellen, gehört also zu $\mathfrak{C}_1 u_1$. Da umgekehrt jede Größe aus u_1 ganz rational durch die Größen (97) und (94) ausgedrückt werden n, so ist sie auch mindestens einer Größe in $\mathfrak{A}_1 u_1$ zugeordnet. Mit cksicht auf Hilfssatz V gilt daher: $\mathfrak{A}_1 u_1$ ist homomorph zu $\mathfrak{C}_1 u_1$.

Bezeichnet μ_1 die Ordnung von $\mathfrak{C}_1 u_1$, so folgt aus Hilfssatz XVIII

$$m_1 \geqq \mu_1 .$$

n gehört jede Größe von $\mathfrak{C}_1 u_1$ zu $\mathfrak{G}$. Ich kann daher ihre $\mathfrak{A} u_1$-mponente bilden. Bezeichnen

) $x_{1_\mu} u_1$ $(\mu = 1, \ldots, e)$

d

)0) $y_{1_\pi} u_1$ $(\pi = 1, \ldots, p)$

$\mathfrak{A} u_1$-Komponenten von (97) bzw. (94), so unterscheiden diese sich gen (98) und (95) von den Größen (96) und (93) höchstens um ößen 1. bzw. 2. Stufe, sind also selbst von der 0-ten bzw. 1. Dimension d gehören daher als Komponenten eines Grundsystems von $\mathfrak{C} u_1$ einem undsystem von $\mathfrak{A} u_1$ an. Bezeichnet endlich noch $\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1$ die durch (99) d (100) erzeugte Gruppe, $m_1^{(1)}$ ihre Ordnung, so schließt man ent-echend wie oben:

$\mathfrak{C}_1 u_1$ ist zu $\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1$ homomorph,

d es ist

$$\mu_1 \geqq m_1^{(1)} .$$

lglich erhält man

)1) $$m_1 \geqq \mu_1 \geqq m_1^{(1)} .$$

n stellen die Größen (99) und (100) offenbar die Gesamtheit der ößen eines Grundsystems von $\mathfrak{A} u_1$ mit $\mathfrak{C} u_1$-Komponenten 0-ter bzw. Dimension dar. Wegen Definition X ist daher

$$m_1 \leq m_1^{(1)},$$

was zusammen mit (101) ergibt:

$$m_1 = \mu_1 = m_1^{(1)}.$$

Nach Hilfssatz XIX ist daher

$$\mathfrak{A}u_1 \text{ isomorph } \mathfrak{C}_1 u_1, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zugleich ergibt sich

$$\mathfrak{A}_1 u_1 \text{ isomorph } \mathfrak{A}_1^{(1)} u_1.$$

Folglich gehören auch die Größen (99) und (100) einem in bezug auf $\mathfrak{C}u_1$ ausgezeichneten Grundsystem von $\mathfrak{A}u_1$ an.

Durch Wiederholung der angewandten Schlüsse ergibt sich daher der

Zusatz. *Bezeichnen sukzessive für* $\lambda \geqq 1$

(102) $$\xi_{\lambda\mu} u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

und

(103) $$\eta_{\lambda\pi} u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

die $\mathfrak{C}u_1$*-Komponenten der Größen*

(104) $$x_{\lambda\mu} u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

bzw.

(105) $$y_{\lambda\pi} u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p),$$

dagegen

und

$$\xi_{\lambda+1,\mu} u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

$$\eta_{\lambda+1,\pi} u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

die $\mathfrak{A}u_1$*-Komponenten der Größen* (102) *bzw.* (103), *ferner* $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)} u_1$ *die durch* (102) *und* (103) *erzeugten Gruppen,* $\mathfrak{A}_1^{(\lambda)} u_1$ *die durch* (104) *und* (105) *erzeugten Gruppen, so ist* $\mathfrak{A}_1 u_1$ *isomorph* $\mathfrak{A}_1^{(\lambda)} u_1$ *isomorph* $\mathfrak{C}_1 u_1$ *isomorph* $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)} u_1$. *Man erhält die Abbildung der Gruppe* $\mathfrak{A}_1^{(\lambda)} u_1$ *auf die Gruppe* $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)} u_1$, *indem man jeder Größe aus* $\mathfrak{A}_1^{(\lambda)} u_1$ *ihre* $\mathfrak{C}_1 u_1$*-Komponente zuordnet, die Abbildung von* $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)} u_1$ *auf* $\mathfrak{A}_1^{(\lambda+1)} u_1$, *indem man jeder Größe aus* $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)} u_1$ *ihre* $\mathfrak{A}u_1$*-Komponente zuordnet.*

Satz XXX. *Ist ein Produkt von* $k > 1$ *Faktoren* (94) *oder eine Summe solcher Produkte — ich gebrauche dafür die Bezeichnung* $f_k(\mathfrak{C}_1 u_1)$ — *in* $\mathfrak{C}u_1$ *von der Stufe* $k+1$, *so ist* $f_k(\mathfrak{C}_1 u_1)$ *auch in* $\mathfrak{C}_1 u_1$ *von der Stufe* $k+1$.

Beweis. Ist (94) bereits ein p.v.H.1.D. in $\mathfrak{C}u_1$, so ist nichts zu beweisen. Ich kann daher annehmen, dies sei nicht der Fall. Dann ergänze ich es nach Satz XIX zu einem solchen durch Hinzunahme der $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten 1. Dimension

(106) $$\eta_\pi u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p';\ p' \geqq 1),$$

in dem aus den Grundsystemen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten p.v.H.1.D. $\mathfrak{G}$ auftreten. Die Größen (106) besitzen dann gewiß keine $\mathfrak{A}u_1$-mponenten 1. Dimension, da sie sonst als Komponenten in dem .H.1.D. (81) von $\mathfrak{A}u_1$ auftreten würden.

Ich bilde nun sukzessive alle Produkte von $l > 1$ Faktoren (94) in endeiner Reihenfolge, (wo jede Größe mehrfach auftreten kann), und me ein solches Produkt dann und nur dann in die Basis von $\mathfrak{C}u_1$ auf, an es sich nicht bereits durch die vorangehenden und durch Größen $+1)$-ter Stufe in $\mathfrak{C}u_1$ ausdrücken läßt. Das so entstehende Haupt- tem l-ter Dimension ergänze ich nötigenfalls zu einem vollen Haupt- tem l-ter Dimension in $\mathfrak{C}u_1$ durch Hinzunahme solcher Produkte von aktoren des p.v.H.1.D. von $\mathfrak{C}u_1$, die mindestens einen Faktor aus 06) enthalten.

Erzeuge ich auf diese Weise eine Hauptbasis in $\mathfrak{C}u_1$, so kann ich vorgegebene Größe $f_k(\mathfrak{C}_1 u_1)$ in der Form darstellen:

07) $$f_k(\mathfrak{C}_1 u_1) = \varphi_{k+1}(\mathfrak{C}_1 u_1) + \psi_{k+1}(\mathfrak{C}u_1).$$

rin bedeuten $\varphi_{k+1}(\mathfrak{C}_1 u_1)$ und $\psi_{k+1}(\mathfrak{C}u_1)$ Linearverbindungen von ößen der Hauptbasis, in denen mit von Null verschiedenen Koeffizienten chstens die Größen einer Dimension $l \geqq k+1$ auftreten können, und ar soll $\varphi_{k+1}(\mathfrak{C}_1 u_1)$ alle diejenigen Größen enthalten, die lediglich aus ktoren (94) bestehen, $\psi_{k+1}(\mathfrak{C}u_1)$ alle übrigen. Ist $\psi_{k+1}(\mathfrak{C}u_1) = 0$, ist die Behauptung bewiesen.

Wäre es ungleich Null, so ist doch jedenfalls seine $\mathfrak{A}u_1$-Komponente n der Stufe $k+2$, da es sich ja aus Produkten von mindestens $k+1$ ktoren zusammensetzt, von denen mindestens einer zu (106) gehört, o eine $\mathfrak{A}u_1$-Komponente 2. Stufe besitzt. Dabei ist die Zahl Null wie ner als Größe beliebiger Stufe aufgefaßt. Gehe ich daher in (107) zu n $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten über, so erhalte ich

08) $$f_k(\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1) = \varphi_{k+1}(\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1) + (k+2).$$

rin haben f_k und φ_{k+1} die gleiche Bedeutung wie in (107), nur daß Argumente (94) durch ihre $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten ersetzt sind, die ja ößen eines p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1$ sind, wenn $\mathfrak{A}_1^{(1)} u_1$ die gleiche Be- ıtung wie in Satz XXIX hat.

Ersetze ich nun in der Hauptbasis von $\mathfrak{C}u_1$ die Größen (94) durch entsprechenden Größen (103) für $\lambda = 1$, die mit

03′) $$\eta_{1\pi} u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

zeichnet seien, so entsteht wieder eine Hauptbasis von $\mathfrak{C}u_1$, da die eichungen bestehen:

$$\eta_{1\pi} u_1 = \eta_\pi u_1 + (2) \qquad (\pi = 1, \ldots, p).$$

Gehe ich nun in der Gleichung (108) zu den $\mathfrak{C}u_1$-Komponenten über, und drücke ich die $\mathfrak{C}u_1$-Komponente der Größe $(k+2)$ ebenfalls durch die neue Hauptbasis aus, so entsteht eine Gleichung der Gestalt:

$$f_k(\mathfrak{C}_1^{(1)}u_1) = \varphi_{k+1}^{(1)}(\mathfrak{C}_1^{(1)}u_1) + \psi_{k+2}(\mathfrak{C}u_1). \tag{109}$$

Darin bedeutet $f_k(\mathfrak{C}_1^{(1)}u_1)$ die alte Funktion für die neuen Argumente (103′), $\varphi_{k+1}^{(1)}(\mathfrak{C}_1^{(1)}u_1)$ die für die Argumente (103′) gebildete Funktion φ_{k+1}, vermehrt um diejenigen Bestandteile der $\mathfrak{C}u_1$-Komponente der Größe $(k+2)$ aus (108), die sich durch die Größen (103′) allein ausdrücken lassen. Dagegen enthält $\psi_{k+2}(\mathfrak{C}u_1)$ diejenigen Bestandteile, für die dies nicht der Fall ist. Wendet man dieses Verfahren wiederholt an, so läßt sich für jedes $\lambda \geqq 1$ eine Gleichung der Gestalt herleiten

$$f_k(\mathfrak{C}_1^{(\lambda)}u_1) = \varphi_{k+1}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_1^{(\lambda)}u_1) + \psi_{k+\lambda+1}(\mathfrak{C}u_1), \tag{110}$$

wo die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke ersichtlich ist. — Ist n die Ordnung von $\mathfrak{C}u_1$, so ist gewiß jede Größe n-ter Stufe in $\mathfrak{C}u_1$ Null. Daher gibt es ein gewisses $\lambda \leqq n-k-1$, für das

$$\psi_{k+\lambda+1}(\mathfrak{C}u_1) = 0$$

ist und folglich

$$f_k(\mathfrak{C}_1^{(\lambda)}u_1) = \varphi_{k+1}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_1^{(\lambda)}u_1). \tag{111}$$

Da die Zuordnung der Größen (94) zu den Größen (103) eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{C}_1^{(\lambda)}u_1$ auf die Gruppe $\mathfrak{C}_1 u_1$ liefert — wie sich durch eventuell wiederholte Anwendung des Zusatzes zu Satz XXIX ergibt —, so folgt aus (111):

$$f_k(\mathfrak{C}_1 u_1) = \varphi_{k+1}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_1 u_1), \tag{112}$$

d. h. $f_k(\mathfrak{C}_1 u_1)$ ist auch in $\mathfrak{C}_1 u_1$ von der Stufe $k+1$, w. z. b. w. Zugleich ergibt sich:

$$\psi_{k+1}(\mathfrak{C}u_1) = 0$$

und

$$\varphi_{k+1}(\mathfrak{C}_1 u_1) = \varphi_{k+1}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_1 u_1),$$

da sonst Subtraktion der Gleichung (112) von der Gleichung (107) einen Widerspruch gegen die Definition der Basis ergeben würde.

Zusatz 1. *Erzeuge ich aus den Systemen*

$$\mathfrak{x}_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, \varepsilon) \tag{113}$$

und

$$\mathfrak{y}_\pi \qquad (\pi = 1, \ldots, \varrho) \tag{114}$$

eine Hauptbasis von $\mathfrak{C}_1$, so bildet diese einen Teil einer Hauptbasis von $\mathfrak{C}$.

Beweis. Da die Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$ isomorph sind, so ist ein dukt von k Faktoren (114) oder eine Summe solcher Produkte in $\mathfrak{C}$ dann von der Stufe $k+1$, wenn der Ausdruck auch in $\mathfrak{C}_1$ von der fe $k+1$ ist, d. h. eine Größe k-ter Dimension in $\mathfrak{C}_1$ ist auch in $\mathfrak{C}$ der Dimension k.

Entsprechend ergibt sich

Zusatz 2. *Enthält* $\mathfrak{A}u_1$ *Größen* 1. *Dimension mit* $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$*-Komponten* 1. *Dimension, und sind in einem in bezug auf* $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$ *ausgezeichn Grundsystem von* $\mathfrak{A}u_1$

$$x_{\alpha_\nu} u_1 \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

$$z_\varkappa u_1 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, q)$$

Gesamtheit der Größen mit $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$*-Komponenten* 0*-ter bzw.* 1. *Dimension,*

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{u}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{v}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, q)$$

e Komponenten, und wird die aus den Systemen

5) $$\mathfrak{u}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

6) $$\mathfrak{v}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, q)$$

ugte Gruppe mit $\mathfrak{D}_1$ *bezeichnet, so bildet eine aus* (115) *und* (116) *ugte Hauptbasis von* $\mathfrak{D}_1$ *einen Teil einer Hauptbasis von* $\mathfrak{D}$.

Satz XXXI. *Die irreduzible integrable Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitze die nicht-ialen Zerlegungen*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}.$$

*hält ein p.v.H.*1.*D. von* $\mathfrak{A}u_1$ *Größen, die verschiedenen Abteilungen bezug auf die Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ *angehören* (*Satz* XX), *so ist* $\mathfrak{A}$ *egbar.*

Beweis. Ich kann nach Satz XXV die Partialeinheiten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ numerieren, daß die Gleichungen bestehen:

$$x_\alpha u_1 = \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{u}_\nu + (1),$$

zu jedem α, $1 \leqq \alpha \leqq h$ eineindeutig ein Wertepaar μ, ν gehört, $\mu \leqq e$, $1 \leqq \nu \leqq f$, $ef = h$.

Da die Voraussetzungen des Hilfssatzes XVI erfüllt sind, so ist in m gemäß Satz XXVI gewählten p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}u_1$: $p > 0$, $q > 0$. . jedes p.v.H.1.D. von $\mathfrak{A}u_1$ enthält p Größen mit $\mathfrak{C}\mathfrak{u}_1$-Komponenten imension und q Größen mit $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$-Komponenten 1. Dimension (Hilfs-

satz XV). Es existiert daher in $\mathfrak{A}u_1$ sowohl ein in bezug auf $\mathfrak{C}u_1$ wie ein in bezug auf $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$ ausgezeichnetes Grundsystem. (War ursprünglich an Stelle der Partialeinheit u_1 eine andere: $u_1' = u_1 + (1)$ benutzt, so ändert dies nichts an den Betrachtungen, wie sich aus der Anmerkung zu Definition X ergibt.)

Unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen sind daher

$$\mathfrak{x}_\mu u_1 \qquad (\mu = 1, \ldots, e)$$

und

$$\mathfrak{y}_\pi u_1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p),$$

die Gesamtheit der Größen eines Grundsystems von $\mathfrak{C}u_1$ mit $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten 0-ter bzw- 1. Dimension,

$$\mathfrak{x}_1 u_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

und

$$\mathfrak{x}_1 v_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, q),$$

die Gesamtseit der Größen eines Grundsystems von $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten 0-ter bzw. 1. Dimension. Folglich sind die Voraussetzungen des Satzes XXVII erfüllt, und es ergibt sich: Die $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten der Systeme

(117)
$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{x}_\mu u_\nu & (\mu = 1, \ldots, e) \\ & (\nu = 1, \ldots, f) \end{array}\right\}$$

nd

(118)
$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{x}_\mu v_\varkappa & (\pi = 1, \ldots, p) \\ \mathfrak{y}_\pi u_\nu & (\varkappa = 1, \ldots, q) \end{array}\right\}$$

bilden ein Grundsystem der Gruppe $\mathfrak{A}u_1$. Die Systeme (117) und (118) selbst bilden aber ein Grundsystem der Gruppe $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ (Satz XV). Wie im Beweise von Satz XXIX schließt man daher: $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ ist zu $\mathfrak{A}u_1$ homomorph. Ist μ die Ordnung von $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, m die von $\mathfrak{A}u_1$, so ist also nach Hilfssatz XVIII: $\mu \geqq m$. Der Isomorphismus beider Gruppen ist nach Hilfssatz XIX gezeigt, wenn ich beweise: m ist nicht kleiner als μ. Hinreichend hierfür ist der Nachweis, daß die $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten eines vollen Hauptsystems λ-ter Dimension von $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ ein Hauptsystem λ-ter Dimension von $\mathfrak{A}u_1$ bilden für jedes λ, zu dem es Größen λ-ter Dimension in $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ gibt. Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist dies bereits bewiesen. Um es allgemein zu zeigen, erzeuge ich aus den Systemen (113) und (114) eine Hauptbasis von $\mathfrak{C}_1$, aus (115) und (116) eine Hauptbasis von $\mathfrak{D}_1$ und setze aus beiden eine Hauptbasis von $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ zusammen (Satz XV). Dann bildet diese nach den Zusätzen zu Satz XXX einen Teil einer Haupsbasis von $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$. s_τ $(\tau = 1, \ldots, t)$ seien ein so gebildetes volles Hauptsystem λ-ter Dimension von $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ $(\lambda \geqq 2)$, $\bar{s}_\tau$ die $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten dieses Systems. Da die Größen (118) sich von ihren $\mathfrak{A}u_1$-Komponenten um Größen 2. Stufe unterscheiden, bestehen in $\mathfrak{G}$ die Gleichungen

(119)
$$s_\tau = \bar{s}_\tau + (\lambda + 1) \qquad (\tau = 1, \ldots, t).$$

Angenommen, es bestünde in $\mathfrak{A}\,u_1$ eine Gleichung der Gestalt

$$\sum_{\tau=1}^{t} c_\tau \mathfrak{z}_\tau = (\lambda+1),$$

nicht sämtliche Konstanten c_τ Null sind, dann ergäbe Einsetzen von 9) in (120) in $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\sum_{\tau=1}^{t} c_\tau s_\tau = (\lambda+1).$$

ist unmöglich, da die Größen s_τ Größen eines Hauptsystems λ-ter Di-sion von $\mathfrak{G}$ sind. Mithin bilden auch die Größen $\mathfrak{z}_\tau$ ein Hauptsystem r Dimension in $\mathfrak{A}\,u_1$. Folglich ist $m = \mu$, also $\mathfrak{A}\,u_1$ isomorph $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ oder

$$\mathfrak{A} \text{ isomporph } \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1.$$

sowohl $\mathfrak{C}_1$ wie $\mathfrak{D}_1$ Wurzelgrößen enthalten, ist keiner der Faktoren Haupteinheit. Also ist $\mathfrak{A}$ zerlegbar.

Satz XXXII. *Die irreduzible integrable Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze die nicht-ialen Zerlegungen $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Haben die Größen eines zu*

$$x_\alpha u_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, h)$$

renden p.v.H.1.D.

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

$\mathfrak{A}\,u_1$ die Größen eines p.v.H.1.D. von $\mathfrak{C}\,u_1$ zu Komponenten, so ist

$$\mathfrak{A} \textit{ isomorph } \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} \textit{ isomorph } \mathfrak{D}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz XVII besitzen die Größen (53) die Größen s vollen Systems von Partialeinheiten in $\mathfrak{C}\,u_1$ zu Komponenten. n. die für die Definition X eingeführten Gruppen $\mathfrak{A}_1 u_1$ und $\mathfrak{C}_1 u_1$ sind mit $\mathfrak{A}\,u_1$ bzw. $\mathfrak{C}\,u_1$ identisch. Nun ändert sich die Ordnung der ppe $\mathfrak{A}_1 u_1 = \mathfrak{A}\,u_1$ nicht, wenn ich zn einem andern Grundsystem von übergehe. Folglich ist jedes Grundsystem in bezug auf $\mathfrak{C}\,u_1$ ausge-hnet. Nach Satz XXIX ist daher $\mathfrak{A}\,u_1$ isomorph $\mathfrak{C}\,u_1$, oder

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}.$$

Aus Satz XXVIII folgt ferner, daß bei geeigneter Numerierung der ialeinheiten die Größen eines Grundsystems von $x_1\mathfrak{B}$ die Größen eines ndsystems von $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$ zu Komponenten haben. Also schließt man ent-chend: $x_1\mathfrak{B}$ isomorph $\mathfrak{x}_1\mathfrak{D}$, oder

$$\mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D},$$

it der Satz bewiesen ist.

Satz XXXIII. *Läßt sich die irreduzible integrable Gruppe $\mathfrak{G}$ auf zwei Arten als Produkt unzerlegbarer Faktoren darstellen, von denen keiner die Haupteinheit ist:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_p = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_q,$$

so ist $p = q$ und bei geeigneter Numerierung der Faktoren: $\mathfrak{A}_i$ isomorph $\mathfrak{B}_i$.

Beweis. Ist $p = 1$, $\mathfrak{G}$ also unzerlegbar, so ist die Behauptung trivial. Ich führe den Beweis durch vollständige Induktion, indem ich annehme, der Satz sei bewiesen für alle Gruppen, die in $p - 1$ unzerlegbare Faktoren zerfallen. Ich beweise ihn dann für die Gruppe $\mathfrak{G}$ aus p unzerlegbaren Faktoren $\mathfrak{A}_i$. Dabei darf ich voraussetzen: $p \geqq 2$.

$\mathfrak{h}_\varkappa$ sei die Anzahl der Partialeinheiten in einem vollen System von $\mathfrak{B}_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq q)$. Setzt man für jedes i $(1 \leqq i \leqq q)$

$$\mathfrak{D}_i = \prod_{\varkappa}{}' \mathfrak{B}_\varkappa,$$

wo $\varkappa$ alle von i verschiedenen Werte von $1 \dots q$ durchläuft, so enthält ein volles System von Partialeinheiten in $\mathfrak{D}_i$

$$\mathfrak{k}_i = \prod_{\varkappa}{}' \mathfrak{h}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \dots, q;\ \varkappa \neq i)$$

Partialeinheiten (Satz XV). Sie seien mit $\mathfrak{u}_{\beta_i}^{(i)}$ $(\beta_i = 1 \dots \mathfrak{k}_i)$ bezeichnet. Eventuell wiederholte Anwendung des Satzes XX ergibt: Ein beliebiges p.v.H.1.D. von $\mathfrak{G}$ zerfällt in bezug auf die Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \prod_{\varkappa=1}^{q} \mathfrak{B}_\varkappa$$

in q Klassen. Die i-teKlasse $(1 \leqq i \leqq q)$ besteht aus $\mathfrak{k}_i$ Abteilungen. Jeder Abteilung läßt sich eineindeutig ein β_i $(1 \leqq \beta_i \leqq \mathfrak{k}_i)$ zuordnen, so daß die Größen dieser Abteilung die Größen eines p.v.H.1.D. von $\mathfrak{B}_i \mathfrak{u}_{\beta_i}^{(i)}$ zu Komponenten besitzen, während alle übrigen Komponenten von der 2. Stufe sind.

Dies wende ich an auf ein nach Satz XV aus dem Grundsystem

(12) $\qquad x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, h)$

und

(13) $\qquad y_\varrho \qquad (\varrho = 1, \dots, r)$

von $\mathfrak{A}_1$ und dem Grundsystem

(26) $\qquad u_\beta \qquad (\beta = 1, \dots, k)$

und

(27) $\qquad v_\sigma \qquad (\sigma = 1 \dots, s)$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_p$$

mmengesetzten p.v.H.1.D. von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{A}_1$ irreduzibel und von der pteinheit verschieden ist, ist $r \geqq 1$. Folglich kommt die Größe $y_1 u_1$ dem p.v.H.1.D. von $\mathfrak{G}$ vor. Die Numerierung der Faktoren $\mathfrak{B}_\varkappa$ n so getroffen werden, daß $y_1 u_1$ in der 1. Klasse vorkommt und zwar ler zu $u_1^{(1)}$ gehörenden Abteilung, was durch eventuelle Umnumerierung Partialeinheiten von $\mathfrak{D}_1$ erreicht werden kann. Dann gehören aber tliche Größen

$$y_\varrho u_1 \qquad (\varrho = 1, \dots, r)$$

er Abteilung an. Denn enthielte (81) Größen aus zwei verschiedenen eilungen, so gehörten diese Größen auch zwei verschiedenen Abteilungen ezug auf die Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1$ an. $\mathfrak{A}_1$ wäre also nach Satz XXXI egbar.

Da sich die Größe $y_1 u_1$ von ihrer $\mathfrak{B}_1 u_1^{(1)}$-Komponente höchstens um Größe zweiter Stufe unterscheidet, enthält auch ein p.v.H.1.D. von $u_1^{(1)}$ eine Größe mit einer $\mathfrak{A}_1 u_1$-Komponente 1. Dimension. Aus der erlegbarkeit von $\mathfrak{B}_1$ läßt sich daher entsprechend schließen: Sämtliche ßen des p.v.H.1.D. von $\mathfrak{B}_1 u_1^{(1)}$ besitzen $\mathfrak{A} u_1$-Komponenten 1. Dimension. D. h. die Größen (81) besitzen die Größen eines p.v.H.1.D. $\mathfrak{B}_1 u_1^{(1)}$ zu Komponenten. Nach Satz XXXII ist daher

$$\mathfrak{A}_1 \text{ isomorph } \mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_p \text{ isomorph } \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_q.$$

$\mathfrak{H}$ in $p-1$ unzerlegbare Faktoren zerfällt, ist nach Voraussetzung

$$p - 1 = q - 1, \quad p = q,$$

l, bei geeigneter Numerierung der Faktoren,

$$\mathfrak{A}_i \text{ isomorph } \mathfrak{B}_i \qquad (2 \leqq i \leqq p),$$

mit die Behauptung allgemein bewiesen ist.

Anhang.

Die in der vorstehenden Arbeit benutzten Beweismethoden sind ihrer tur nach auf integrable Gruppen beschränkt. Denn in einer nichtegrablen Gruppe lassen sich Wurzeln der Null (d. h. Größen, deren enzen von einer bestimmten an verschwinden) angeben, deren Summe l Produkt, um so mehr vorderes oder hinteres Produkt mit einer beigen Größe der Gruppe, nicht wieder Wurzeln der Null sind. Auf diese ßen läßt sich daher der Begriff der Dimension nicht anwenden Trotz-

dem ist es nicht schwer, den Satz von der eindeutigen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren auf irreduzible nicht-integrable Gruppen zu übertragen.

Für den einfachsten Typus, die irreduziblen Dedekindschen Gruppen, hat Herr Schmeidler in der Vorrede zu seiner Dissertation die Eindeutigkeit der Zerlegung bereits dargetan. In diesen Gruppen läßt sich eine Normalbasis wählen, deren Einheiten e_{ik} dem Multiplikationsgesetze genügen:

$$e_{ik}\, e_{\varkappa l} = \begin{cases} 0, & k \neq \varkappa, \\ e_{il}, & k = \varkappa, \end{cases} \tag{121}$$

Damit das durch diese Einheiten erzeugte Gebilde eine Gruppe ist, also eine Haupteinheit besitzt, und zugleich die Irreduzibilitätsbedingungen erfüllt, müssen die Indizes $i, k, \varkappa, l$ den gleichen Wertevorrat durchlaufen, etwa von $1, \ldots, m$. Die irreduziblen Dedekindschen Gruppen sind also stets von Quadratzahlordnung m^2, wo $m > 1$ ist, wenn man die Gruppe der Ordnung 1, also die Gruppe der gewöhnlichen komplexen Zahlen, nicht mit zu den Dedekindschen rechnet. Sie enthalten, wie man leicht erkennt, keine von Null verschiedene Wurzelgröße, d. h. Wurzel der Null, die, mit jeder Größe der Gruppe multipliziert, wieder eine Wurzel der Null ergibt, und zwar sind sie, mit der Gruppe der Ordnung 1, die einzigen irreduziblen Gruppen von dieser Eigenschaft. Hieraus schließt man leicht, daß auch alle Faktoren irreduzible Dedekindsche Gruppen von diesem Typus sind. Ist

$$m = \prod_{i=1}^{k} p_i,$$

wo die p_i nicht notwendig voneinander verschiedene Primzahlen sind, so läßt sich die irreduzible Dedekindsche Gruppe der Ordnung m^2 als Produkt von k irreduziblen Dedekindschen Gruppen der Ordnungen p_i^2 $(i = 1, \ldots, k)$ schreiben, und diese Zerlegung ist eindeutig wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von m in Primzahlen.

Der Beweis des Zerlegungssatzes für beliebige irreduzible nicht-integrable Gruppen stützt sich auf einen von Herrn Cartan[19]) herrührenden Satz, der es gestattet, jede Gruppe $\mathfrak{G}$ aus einer durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmten integrablen Gruppe $\mathfrak{G}'$ herzuleiten. Ist $E_1, \ldots, E_m$ irgendeine Normalbasis (vgl. Satz I) von $\mathfrak{G}'$ mit den Partialeinheiten $E_1, \ldots, E_H$, $H \geqq 1$, so hat eine beliebige Größe X von $\mathfrak{G}$ die Gestalt:

$$X = \sum_{\mu=1}^{m} X_\mu E_\mu. \tag{122}$$

[19]) Ann. Fac. sc. Toulouse 12 (1898), mém. Nr. 2.

E_μ vom Charakter $(\alpha; \beta)$, so ist

$$X_\mu = \sum_{i=1}^{M_\alpha} \sum_{k=1}^{M_\beta} x_{ik}^{(\mu)} e_{ik}. \tag{3}$$

in bedeuten die M_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$ positive ganze Zahlen, die $x_{ik}^{(\mu)}$ öhnliche komplexe Zahlen, die e_{ik} Einheiten, die dem Multiplikationsetz (121) genügen. Die Einheit E_μ von $\mathfrak{G}'$ wird also durch $M_\alpha M_\beta$ e Einheiten $e_{ik} E_\mu$ ersetzt. Insbesondere tritt an die Stelle jeder tialeinheit E_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$, sofern sie nicht ungeändert bleibt, $_\alpha = 1$), eine irreduzible Dedekindsche Gruppe der Ordnung M_α^2. rch $\mathfrak{G}'$ und die Zahlenfolge $M_1, \ldots, M_H$ ist $\mathfrak{G}$ vollkommen bestimmt, ausgesetzt, daß die Numerierung der Partialeinheiten von $\mathfrak{G}'$ mit angeben ist. Ich sage: $\mathfrak{G}$ ist aus $\mathfrak{G}'$ vermöge der Zahlen $M_1, \ldots, M_H$ geleitet. Sind

$$E_\alpha' = E_\alpha + (1) \qquad (\alpha = 1, \ldots, H)$$

Partialeinheiten einer anderen Normalbasis von $\mathfrak{G}'$, so gewinnt man ihr die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch den gleichen Prozeß; dabei sind den Einten E_α' die Zahlen M_α zugeordnet. — Unmittelbar ergibt sich der

Satz XXXIV. *Ist eine der Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ irreduzibel, so gilt das iche von der anderen.*

Es sei nun $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}'$ hergeleitet, und zwar sollen bei ser Herleitung den Partialeinheiten e_α $(\alpha = 1, \ldots, h,\ h \geqq 1)$ von $\mathfrak{A}'$ Zahlen m_α $(\alpha = 1, \ldots, h)$, den Partialeinheiten f_β $(\beta = 1, \ldots, k,\ k \geqq 1)$ $\mathfrak{B}'$ die Zahlen n_β $(\beta = 1, \ldots, k)$ zugeordnet sein. Aus dem Bau der uppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und der Eindeutigkeit der Herleitung der nicht-integrablen den integrablen Gruppen ergibt sich dann der

Satz XXXV. *Das Produkt $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist aus dem Produkt $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ geleitet, und zwar sind den Partialeinheiten $e_{\alpha\beta} = e_\alpha f_\beta$ von $\mathfrak{G}'$ die Zahlen*

$$m_{\alpha\beta} = m_\alpha n_\beta \tag{24}$$

geordnet. Daraus folgt

Satz XXXVI. *Jede Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ läßt sich gewinnen aus er Zerlegung $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, wo die ungestrichenen aus den gestrichenen uppen hergeleitet sind.*

Satz XXXVII. *Leitet man aus der integrablen Gruppe $\mathfrak{G}'$ die uppe $\mathfrak{G}$ her, indem man den Partialeinheiten $e_{\alpha\beta} = e_\alpha f_\beta$ die Zahlen $_\beta$ zuordnet, so läßt sich aus der Zerlegung $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ dann und nur nn eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gewinnen, wo wieder die ungestrichenen s den gestrichenen Gruppen hergeleitet sind, wenn das Gleichungssystem 24) Lösungen in positiven ganzen Zahlen m_α und n_β besitzt.*

Den Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung führe ich in drei Schritten. Ich zeige I.: die irreduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ läßt sich eindeutig in der Gestalt darstellen $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{D}$ entweder die Haupteinheit oder eine Dedekindsche Gruppe ist, während $\mathfrak{H}$ keinen Dedekindschen Faktor besitzt. II.: $\mathfrak{H}$ ist eindeutig in der Form darstellbar: $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{J}$, wo $\mathfrak{F}$ eine Gruppe ist, die die Haupteinheit zum vollen System von Partialeinheiten besitzt, also gewiß integrabel ist, während $\mathfrak{J}$ keinen Faktor von dieser Eigenschaft besitzt oder selbst die Haupteinheit ist. III.: $\mathfrak{J}$ läßt sich eindeutig in unzerlegbare Faktoren zerfällen. Da die Eindeutigkeit der Zerlegung für irreduzible Dedekindsche Gruppen und für integrable Gruppen (also erst recht für solche, deren Haupteinheit ein volles System von Partialeinheiten bildet) dargetan ist, so folgt daraus die Eindeutigkeit der Zerlegung der irreduziblen Gruppen $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren. Die Eindeutigkeit ist hier, wie stets, in dem Sinne gemeint, daß bei zwei Zerlegungen die Faktorenanzahl gleich ist und die Faktoren der beiden Zerlegungen paarweise einander isomorph sind.

I. Die einzigen irreduziblen Gruppen ohne Wurzelgrößen sind, im Bereich der integrablen Gruppen, die Gruppe der Ordnung 1, in dem der nicht-integrablen die Dedekindschen Gruppen. Daher gilt

Satz XXXVIII. *Eine irreduzible nicht-integrable Gruppe ist dann und nur dann eine Dedekindsche Gruppe, wenn sie aus der Gruppe der Ordnung* 1 *hergeleitet ist.*

Satz XXXIX. *Die aus der integrablen Gruppe $\mathfrak{G}'$ vermöge der Zahlen M_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$ hergeleitete Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt dann und nur dann einen irreduziblen Dedekindschen Faktor, wenn der größte gemeinsame Teiler*

$$d = [M_1, \ldots, M_H] > 1$$

ist.

Beweis. Es sei

$$M_\alpha = d\, n_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, H),$$

wo die n_α ganze positive Zahlen sind, d eine ganze Zahl größer als 1 ist. Dann leite ich aus der Haupteinheit E die irreduzible Dedekindsche Gruppe der Ordnung d^2 her, aus $\mathfrak{G}'$ die Gruppe $\mathfrak{H}$ vermöge der Zahlen n_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$. Dann ist $\mathfrak{D}\mathfrak{H}$ aus $E\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ vermöge der Zahlen

$$d\, n_\alpha = M_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, H)$$

hergeleitet, also gleich $\mathfrak{G}$. — Es sei umgekehrt $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{D}$ eine irreduzible Dedekindsche Gruppe einer Ordnung δ^2 $(\delta > 1)$ ist. Da $\mathfrak{D}$ aus E hergeleitet ist, ist $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{G}'$ hergeleitet, etwa vermöge der Zahlen n_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{G}'$ vermöge der Zahlen

$$M_\alpha = \delta\, n_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, H)$$

geleitet. Da δ in sämtlichen M_α, also auch in ihrem größten gemeinen Teiler d aufgeht, ist $d > 1$, w. z. b. w.

Hilfssatz XX. *Besitzen die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keinen irreduziblen dekindschen Faktor, so gilt das gleiche von $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei aus der integrablen Gruppe $\mathfrak{A}'$ vermöge der Zahlen $(\alpha = 1, \ldots, h)$, $\mathfrak{B}$ aus der integrablen Gruppe $\mathfrak{B}'$ vermöge der Zahlen $(\beta = 1, \ldots, k)$ hergeleitet. Nach Satz XXXIX ist dann

$$[m_1, \ldots, m_h] = 1,$$
$$[n_1, \ldots, n_k] = 1.$$

für die Zahlen $m_{\alpha\beta}$, vermöge derer $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ hergeleitet ist, Gleichungen (124) gelten, so ist auch

$$[m_{11}, \ldots, m_{\alpha\beta}, \ldots, m_{hk}] = [m_1 n_1, \ldots, m_\alpha n_\beta, \ldots, m_h n_k] = 1.$$

s Satz XXXVIII folgt daher die Behauptung.

Satz XL. *Die irreduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ lasse sich auf zwei Arten in zerlegbare Faktoren zerfällen. $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ seien die Produkte der dekindschen Faktoren in den beiden Zerlegungen, falls solche vorden sind, andernfalls die Haupteinheit, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ die Produkte der ht-Dedekindschen Faktoren, oder, falls $\mathfrak{G}$ nur Dedekindsche ktoren besitzt, die Haupteinheit. Dann ist:*

$$\mathfrak{D} \text{ isomorph } \mathfrak{D}_1; \quad \mathfrak{H} \text{ isomorph } \mathfrak{H}_1.$$

Beweis. Da $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ beide aus der Haupteinheit hergeleitet sind, d $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ beide aus $\mathfrak{G}'$ hergeleitet, wenn $\mathfrak{G}'$ wieder die Gruppe bechnet, aus der $\mathfrak{G}$ vermöge der Zahlen M_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$, hergeleitet Der Beweis ist daher erbracht, wenn ich zeige, daß die Zahlen, verge derer $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ aus E bzw $\mathfrak{G}'$ hergeleitet sind, reinstimmen. Für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ seien diese Zahlen mit δ und δ_1 bechnet. Dann gehen δ und δ_1 beide in sämtlichen M_α, also in ihrem ßten gemeinsamen Teiler d auf. Ich behaupte: $\delta = \delta_1 = d$. Wäre a δ ein echter Teiler von d, so besäßen die Zahlen n_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$, möge derer $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{G}'$ hergeleitet ist, noch einen von 1 verschiedenen meinsamen Teiler wegen $M_\alpha = \delta n_\alpha$. Dann enthielte $\mathfrak{H}$ nach Satz XXXVIII en Dedekindschen Faktor, was nach Hilfssatz XX ausgeschlossen ist. glich ist $\delta = d$. Genau so ergibt sich: $\delta_1 = d$. Daher sind auch die len, vermöge derer $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ aus $\mathfrak{G}'$ hergeleitet sind, gleich, nämlich

$$n_\alpha = \frac{M_\alpha}{d} \qquad (\alpha = 1, \ldots, H),$$

z. b. w.

II. Ich kann mich daher bei dem Beweise des Eindeutigkeitssatzes auf diejenigen irreduziblen Gruppen $\mathfrak{H}$ beschränken, die keinen Dedekindschen Faktor besitzen. Doch ist diese Einsckränkung vorerst noch nicht notwendig.

Definition XI. *Unter einem vollen System von Partialeinheiten einer beliebigen Gruppe hyperkomplexer Größen verstehe ich ein System von Größen* ε_i $(i = 1, \ldots, J)$ *von folgenden Eigenschaften*:

1. $$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$$

und für $J > 1$: $$\varepsilon_i \varepsilon_k = 0 \qquad (i \neq k),$$

2. eine Linearkombination der Größen ε_i ist nur dann eine Wurzel der Null, wenn sämtliche Koeffizienten verschwinden,

3. jede Größe der Gruppe läßt sich durch die ε_i und durch Wurzeln der Null linear darstellen.

Jedes volle System von Partialeinheiten einer integrablen Gruppe erfüllt offenbar diese drei Bedingungen.

Wie Herr Cartan gezeigt hat[20]), ist die Anzahl J eine Invariante der Gruppe, d. h. unabhängig von der speziellen Wahl der Partialeinheiten, die selbst nur bis auf Wurzeln der Null eindeutig bestimmt sind.

Ein volles System von Partialeinheiten einer irreduziblen Dedekindschen Gruppe der Ordnung m^2 enthält genau m Größen. Als solche kann man die Größen e_{ii} $(i = 1, \ldots, m)$ der Normalbasis (121) wählen. Daß diese den Bedingungen 1 bis 3 der Definition XI genügen, ergibt sich unmittelbar aus dem Multiplikationsschema (121); denn die Größen e_{ik} $(i \neq k)$ sind sämtlich Wurzaln der Null, weil ihr Quadrat verschwindet.

Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ vermöge der Zahlen $M_\alpha (\alpha = 1, \ldots, H)$ aus der integrablen Gruppe $\mathfrak{G}'$ mit den Partialeinheiten E_α $(\alpha = 1, \ldots, H)$ hergeleitet, so ergibt sich aus den Cartanschen Formeln (122) und (123), daß ein volles System von Partialeinheiten von $\mathfrak{G}$

$$J = \sum_{\alpha=1}^{H} M_\alpha$$

Größen enthält, nämlich die Partialeinheiten

$$e_{11} E_1, \ldots, e_{M_1 M_1} E_1, \ldots, e_{11} E_H, \ldots, e_{M_H M_H} E_H.$$

Denn die Größe $e_{ik} E_\mu$ ist eine Wurzel der Null, sobald eine der Ungleichungen gilt: $i \neq k$, $\mu > H$. Dann gilt:

Satz XLI. *Ist* $\mathfrak{G}$ *aus* $\mathfrak{G}'$ *hergeleitet, so besitzt die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *dann und nur dann einen von der Haupteinheit verschiedenen Faktor, dessen*

[20]) A. a. O., Nr. 67.

upteinheit ein volles System von Partialeinheiten bildet, wenn $\mathfrak{G}'$ einen ktor der gleichen Eigenschaft hat.

Beweis. Für eine Gruppe, die die Haupteinheit zum vollen System Partialeinheiten hat, gilt:

$$J = \sum_{\alpha=1}^{H} M_\alpha = 1, \quad \text{d. h. } H = 1 \quad \text{und} \quad M_1 = 1.$$

Die Gruppe ist also vermöge der Zahl 1 aus einer integrablen Gruppe geleitet (die die Haupteinheit zum vollen System von Partialeinheiten itzt), ist daher mit ihr identisch. Hat also in der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Haupteinheit zum vollen System von Partialeinheiten, und ist $= \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ die entsprechende Zerlegung, so ist $\mathfrak{A}$ isomorph $\mathfrak{A}'$, d. h. auch besitzt die Haupteinheit zum vollen System von Partialeinheiten. Es umgekehrt $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, wo $\mathfrak{A}'$ die Haupteinheit zum vollen System Partialeinheiten besitzt. Ist dann $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$ vermöge der Zahlen $(\alpha = 1, \ldots, k)$ hergeleitet, so leite ich aus $\mathfrak{B}'$ die Gruppe $\mathfrak{B}$ ebenfalls möge der Zahlen M_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ her. Aus Satz XXXV folgt dann: isomorph $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz XLII. $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ *seien zwei Zerlegungen der irreduziblen uppe $\mathfrak{G}$, in denen die Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ die Haupteinheit zum vollen stem von Partialeinheiten besitzen, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ entweder die Haupteinheit d, oder keinen von der Haupteinheit verschiedenen Faktor dieser genschaft besitzen. Dann ist:*

$$\mathfrak{A} \textit{ isomorph } \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} \textit{ isomorph } \mathfrak{D}.$$

Beweis. $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ seien die entsprechenden Zerlegungen Gruppe $\mathfrak{G}'$, aus der $\mathfrak{G}$ hergeleitet ist. Dann besitzen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}'$ nach z XLI keinen von der Haupteinheit verschiedenen Faktor, der die upteinheit zum vollen System von Partialeinheiten hat; dagegen haben und $\mathfrak{C}'$ nur solche Faktoren, oder sie sind selbst die Haupteinheit. s der Eindeutigkeit der Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen er- t man daher:

$$\mathfrak{A}' \text{ isomorph } \mathfrak{C}', \quad \mathfrak{B}' \text{ isomorph } \mathfrak{D}'.$$

Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ selbst integrabel, also vermöge der Zahl 1 aus $\mathfrak{A}'$ und hergeleitet sind, so folgt

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C} \text{ isomorph } \mathfrak{C}', \quad \text{also } \mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}.$$

Es sind dann aber auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}'$ vermöge derselben hlen hergeleitet, wie $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$. Also folgt aus

$$\mathfrak{B}' \text{ isomorph } \mathfrak{D}' \text{ auch: } \mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D}.$$

III. Nach dem oben Gesagten brauche ich den Eindeutigkeitssatz jetzt nur für solche irreduzible Gruppen zu beweisen, die weder einen Dedekindschen Faktor noch einen von der Haupteinheit verschiedenen Faktor besitzen, der die Haupteinheit zum vollen System von Partialeinheiten hat.

Hilfssatz XXI. *Die irreduzible, keinen Dedekindschen Faktor besitzende Gruppe* $\mathfrak{G}$ *sei auf zwei Arten zerlegbar:* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$. *In den zugehörigen Zerlegungen* $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ *sei*

1. $\mathfrak{A}'$ *isomorph* $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ *isomorph* $\mathfrak{D}'$,

2. *unter*

$$e_\alpha, \quad \mathfrak{e}_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, h),$$

$$f_\beta, \quad \mathfrak{f}_\beta, \qquad (\beta = 1, \ldots, k)$$

volle Systeme von Partialeinheiten von $\mathfrak{A}', \mathfrak{C}', \mathfrak{B}', \mathfrak{D}'$ *verstanden, sei bei geeigneter Numerierung der Partialeinheiten von* $\mathfrak{C}'$ *und* $\mathfrak{D}'$:

$$e_\alpha f_\beta = \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{f}_\beta + (1).$$

Dann gilt auch:

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D}.$$ [21])

Beweis. Wegen der Bedingung 1 brauche ich nur zu zeigen, daß $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{A}'$ vermöge derselben Zahlenfolge hergeleitet wird, wie $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{C}'$, und ebenso $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}'$ vermöge derselben Zahlenfolge wie $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}'$. Bei der Herleitung von $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$ seien den Partialeinheiten $e_\alpha f_\beta$ die Zahlen $m_{\alpha\beta}$ zugeordnet. Dann kann ich wegen Bedingung 2 $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$ auch herleiten, indem ich den Partialeinheiten

$$\mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{f}_\beta = e_\alpha f_\beta + (1)$$

die gleiche Zahlenfolge $m_{\alpha\beta}$ zuordne. Der Satz ist daher bewiesen, wenn ich zeige, daß durch die Zahlen $m_{\alpha\beta}$ auch die Zerlegung $m_{\alpha\beta} = m_\alpha n_\beta$ eindeutig bestimmt ist. Da eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ existiert, besitzen die Gleichungen gewiß Lösungen in ganzen positiven Zahlen m_α und n_β. Da $\mathfrak{G}$ nach Voraussetzung keinen Dedekindschen Faktor besitzt, gilt das gleiche von seinen Faktoren. Die jedem Faktor zugeordneten Zahlen haben daher den größten gemeinsamen Teiler 1. Ich erhalte daher z. B. die m_α $(\alpha = 1, \ldots, h)$, indem ich die Zahlen m_{α_1} $(\alpha = 1, \ldots, h)$ durch ihren größten gemeinsamen Teiler n_1 dividiere. Entsprechend gewinne ich die Zahlen n_β etwa aus

[21]) Die erste Bedingung allein genügt noch nicht. Es könnte nämlich z. B. zugleich $\mathfrak{A}'$ isomorph $\mathfrak{B}'$ sein, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ könnten dabei noch vermöge verschiedener Zahlen aus $\mathfrak{A}'$ hergeleitet, also verschieden sein. Setzt man $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so wäre zwar noch $\mathfrak{A}'$ isomorph $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ isomorph $\mathfrak{D}'$, nicht aber $\mathfrak{A}$ isomorph $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ isomorph $\mathfrak{D}$. Die zweite Bedingung sorgt hier dafür, daß die Faktoren in der richtigen Reihenfolge genommen werden.

Zahlen $m_{1\beta}$. Zugleich mit dem größten gemeinsamen Teiler sind r auch diese Quotienten eindeutig bestimmt, womit der Hilfssatz be-sen ist. Entsprechend beweist man den

Zusatz. *Die irreduzible, keinen Dedekindschen Faktor besitzende ıppe* $\mathfrak{G}$ *sei auf zwei Arten zerlegbar*:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{K} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots\mathfrak{L}.$$

In den entsprechenden Zerlegungen

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\ldots\mathfrak{K}' = \mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\ldots\mathfrak{L}'$$

$\mathfrak{A}'$ *isomorph* $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ *isomorph* $\mathfrak{D}'$, ..., $\mathfrak{K}'$ *isomorph* $\mathfrak{L}'$.

$$e_\alpha, f_\beta, \ldots, g_\gamma$$

$$(\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k;\ \ldots;\ \gamma = 1, \ldots, l)$$

).

$$\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{f}_\beta, \ldots, \mathfrak{g}_\gamma$$

$$(\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k;\ \ldots;\ \gamma = 1, \ldots, l)$$

en volle Systeme von Partialeinheiten von $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{K}'$, *bzw.* $\mathfrak{D}', \ldots, \mathfrak{L}'$. *Bei geeigneter Numerierung der deutschen Buchstaben len die* $h\,k\ldots l$ *Gleichungen bestehen*

$$e_\alpha f_\beta \ldots g_\gamma = \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{f}_\beta \ldots \mathfrak{g}_\gamma.$$

Dann ist auch:

$\mathfrak{A}$ isomorph $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ isomorph $\mathfrak{D}$, ..., $\mathfrak{K}$ isomorph $\mathfrak{L}$.

Satz XLIII. *Läßt sich die irreduzible Gruppe* $\mathfrak{G}$, *die keinen dekindschen Faktor und keinen Faktor mit der Haupteinheit als lem System von Partialeinheiten besitzt, auf zwei Arten in unzerleg-e Faktoren zerfällen, von denen keiner die Haupteinheit ist*:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{K} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots\mathfrak{L},$$

ist die Anzahl der Faktoren die gleiche, und bei geeigneter Benennung Faktoren ist:

$\mathfrak{A}$ *isomorph* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ *isomorph* $\mathfrak{D}$, ..., $\mathfrak{K}$ *isomorph* $\mathfrak{L}$.

Beweis. Die gestrichenen Buchstaben sollen wieder stets die Gruppen zeichnen, aus denen die mit den ungestrichenen Buchstaben benannten ıppen hergeleitet sind. Ist $\mathfrak{G}$ unzerlegbar, so ist nichts zu beweisen; kann daher annehmen: $\mathfrak{G}$ besitzt mindestens zwei Faktoren, von denen ner die Haupteinheit ist. Ich unterscheide zwei Fälle:

1. $\mathfrak{G}$ besitzt eine Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{K},$$

der eine Zerlegung von $\mathfrak{G}'$ in unzerlegbare Faktoren entspricht:

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \ldots \mathfrak{K}'.$$

Nun entspricht jeder Zerlegung von $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{G}'$ in eine gleiche Anzahl von Faktoren, und $\mathfrak{G}$ hat keinen Dedekindschen, also aus der Haupteinheit von $\mathfrak{G}'$ hergeleiteten Faktor. Folglich ist in der zweiten Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren die Anzahl der Faktoren gewiß nicht größer als in der ersten. Wäre sie kleiner, so wäre mindestens einer der Faktoren der zweiten Zerlegung, etwa $\mathfrak{C}$, wegen Satz XXXIII aus einem zerlegbaren Faktor von $\mathfrak{G}'$ hergeleitet. Ich kann die Bezeichnungen so gewählt denken, daß

$$\mathfrak{C}' \text{ isomorph } (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \ldots), \quad \ldots, \quad \mathfrak{L}' \text{ isomorph } (\ldots \mathfrak{K}').$$

Aus der Art, wie die unzerlegbaren Faktoren zweier Zerlegungen der irreduziblen integrablen Gruppe $\mathfrak{G}'$ einander zugeordnet sind, folgt dann, daß die Zerlegungen

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{C}' \ldots \mathfrak{L}' = (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \ldots) \ldots (\ldots \mathfrak{K}')$$

die Voraussetzungen des Zusatzes zu Hilfssatz XXI erfüllen. Also wäre $\mathfrak{C}$ isomorph $(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \ldots)$. Das ist ein Widerspruch gegen die Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{C}$. Folglich ist die Anzahl der Faktoren in beiden Zerlegungen gleich, und es folgt, da die Voraussetzungen des Zusatzes zu Hilfssatz XXI erfüllt bleiben,

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{K} \text{ isomorph } \mathfrak{L}.$$

2. Die der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \ldots \mathfrak{K}$ in unzerlegbare Faktoren entsprechende Zerlegung $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \ldots \mathfrak{K}'$ besteht nicht aus lauter unzerlegbaren Faktoren. Um eine Anhäufung von Indizes zu vermeiden, nehme ich an, $\mathfrak{G}$ bestehe aus zwei, $\mathfrak{G}'$ aus drei unzerlegbaren Faktoren:

$$\mathfrak{G} \text{ isomorph } \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{G}' \text{ isomorph } \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'.$$

Aus dem Beweise wird sich ergeben, daß das gleiche Schlußverfahren auch bei mehr Faktoren anwendbar ist. Eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in drei Faktoren (allgemein in so viel Faktoren, wie $\mathfrak{G}'$ unzerlegbare Faktoren besitzt) existiert dann nicht, da dann, wie unter 1. gezeigt wurde, jede andere Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren drei Faktoren besitzen würde. Da $\mathfrak{G}$ zerlegbar ist, kann ich daher annehmen, $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sei eine andere Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren. Es ist zu zeigen, daß dann bei geeigneter Benennung der Faktoren:

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D}$$

Lassen sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ aus den gleichen oder — bei ei verschiedenen Zerlegungen von $\mathfrak{G}'$ — aus den einander entsprechenden ktoren von $\mathfrak{G}'$ herleiten, etwa $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{R}'$, folgt die Behauptung aus Hilfssatz XXI. Ich nehme daher an, es sei

' isomorph $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{B}'$ isomorph $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{C}'$ isomorph $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{D}'$ isomorph $\mathfrak{Q}'$.

Ich behaupte: dann ist $\mathfrak{A}$ zerlegbar, womit ein Widerspruch gezeigt ist. bezeichne die Partialeinheiten von $\mathfrak{P}'$ mit e_α $(\alpha = 1, \ldots, h)$, von $\mathfrak{Q}'$ f_β $(\beta = 1 \ldots k)$, von $\mathfrak{R}'$ mit g_γ $(\gamma = 1, \ldots, l)$, von $\mathfrak{G}'$ mit

$$e_{\alpha\beta} = e_\alpha f_\beta g_\gamma .$$

Die entsprechenden bei der Herleitung von $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}'$ benutzten len seien $m_{\alpha\beta\gamma}$. Ferner seien den Partialeinheiten $e_\alpha f_\beta$ von $\mathfrak{A}'$ bei der rleitung von $\mathfrak{A}$ die Zahlen $m_{\alpha\beta}$, den Partialeinheiten g_γ bei der Her- ung von $\mathfrak{B}$ die Zahlen m_γ, den Partialeinheiten $e_\alpha g_\gamma$ von $\mathfrak{C}'$ bei der rleitung von $\mathfrak{C}$ die Zahlen $n_{\alpha\gamma}$, den Partialeinheiten f_β bei der Her- ung von $\mathfrak{D}$ die Zahlen n_β zugeordnet. Dann bestehen nach Satz XXXV $h \cdot k \cdot l$ Relationen

$$m_{\alpha\beta\gamma} = m_{\alpha\beta} m_\gamma = n_{\alpha\gamma} n_\beta .$$

Für beliebiges, aber festes $\alpha\,(1 \leqq \alpha \leqq h)$ und $\gamma = 1$ ergibt sich daher

$$m_{\alpha 1} : m_{\alpha 2} : \ldots : m_{\alpha k} = n_1 : n_2 : \ldots : n_k .$$

Folglich bestehen die Gleichungen

$$m_{\alpha\beta} = p_\alpha n_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, k).$$

Für jedes $\alpha = 1, \ldots, h$ besteht ein solches Gleichungssystem, in dem ein nur von α abhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Da $\mathfrak{G}$, und folglich h $\mathfrak{D}$, keinen Dedekindschen Faktor besitzt, ist der größte gemein- ie Teiler der Zahlen n_β gleich 1 (Satz XXXIX). Da die Zahlen $m_{\alpha\beta}$ n_β positiv und ganz sind, ist daher auch p_α positiv und ganz. Nach z XXXVII ist demnach $\mathfrak{A}$ zerlegbar:

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{P}\mathfrak{Q},$$

$\mathfrak{P}$ vermöge der Zahlen p_α aus $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ vermöge der Zahlen n_β aus $\mathfrak{Q}'$ geleitet, also übrigens isomorph $\mathfrak{D}$ ist. Der Widerspruch ist also gezeigt. glich sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, bzw. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ aus entsprechenden Faktoren geleitet, woraus nach Hilfssatz XXI folgt:

$$\mathfrak{A} \text{ isomorph } \mathfrak{C}, \ \mathfrak{B} \text{ isomorph } \mathfrak{D}.$$

Überträgt man diese Schlußweise sinngemäß auf eine aus mehr Faktoren bestehende irreduzible Gruppe, so ergibt Zusammenfassung der Sätze XXXIII, XL, XLII und XLIII:

Satz XLIV. *Ist eine irreduzible Gruppe hyperkomplexer Größen auf zwei Arten als Produkt unzerlegbarer Faktoren, von denen keiner die Haupteinheit ist, darstellbar:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_p = \mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_q,$$

so ist $p = q$ *und, bei geeigneter Numerierung der Faktoren:*

$$\mathfrak{A}_i \text{ isomorph } \mathfrak{B}_i.$$

(Eingegangen am 10. Dezember 1921.)